Martingales et processus de Levy 2A

19 mars 2015

Table des matières

Chapitre 1

Espérance conditionnelle. Généralités sur les processus à temps discret

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Dans la suite nous utiliserons les trois abréviations suivantes : v.a.r pour variable aléatoire à valeurs réelles, i.i.d pour indépendantes et identiquement distribuées et p.s pour presque sûrement.

1.1 Rappels sur l'espérance conditionnelle

1.1.1 Définition de l'espérance conditionnelle

Soient $\mathcal{B}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$ et $\mathbb{L}^2(\mathcal{A})$ l'ensemble des (classes d'équivalence de) v.a.r de carré intégrable. Alors $\mathbb{L}^2(\mathcal{B})$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathbb{L}^2(\mathcal{A})$. Dans la suite, nous noterons identiquement une v.a.r X et sa classe d'équivalence $[X]$ pour la relation d'équivalence d'égalité $\mathbb{P}-$p.s.

Définition 1 *Soit $X \in \mathbb{L}^2(\mathcal{A})$. La projection orthogonale de X sur $\mathbb{L}^2(\mathcal{B})$ est notée $\mathbb{E}(X|\mathcal{B})$ et est appelée espérance conditionnelle de X sachant $\mathcal{B}$.*

Ainsi, on dit que Z est une version de l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(X|\mathcal{B})$ si Z est $\mathcal{B}-$mesurable et si

$$\mathbb{E}(UX) = \mathbb{E}(UZ), \quad U \in \mathbb{L}^2(\mathcal{B}). \tag{1.1}$$

Du fait de la non-unicité d'une telle variable aléatoire Z (c'est la classe d'équivalence de Z qui est unique), on note souvent $Z = \mathbb{E}(X|\mathcal{B})$ p.s. La relation (1.1) revient à avoir l'égalité

$$\mathbb{E}|X - Z|^2 = \inf\left\{\mathbb{E}|X - U|^2 : U \in \mathbb{L}^2(\mathcal{B})\right\}. \tag{1.2}$$

On peut aussi définir la notion d'espérance conditionnelle pour une variable aléatoire seulement intégrable.

Définition 2 *Si $X \in \mathbb{L}^1(\mathcal{A})$, il existe un unique élément $Z \in \mathbb{L}^1(\mathcal{B})$ tel que*

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_B X) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_B Z), \quad B \in \mathcal{B}. \tag{1.3}$$

Cet élément Z est appelée espérance conditionnelle de X sachant $\mathcal{B}$ et est noté $\mathbb{E}(X|\mathcal{B})$.

Bien sûr, lorsque $X \in \mathbb{L}^2(\mathcal{A})$, les deux définitions précédentes coïncident.

Quelques exemples élémentaires

1. Si $\mathcal{B} = \{\emptyset, \Omega\}$ est la tribu triviale et X est une v.a.r intégrable, alors $\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) = \mathbb{E}(X)$ p.s.
2. Si $\{A_1, \ldots, A_n\}$ est une partition de Ω, alors la tribu engendrée par ces évènements est
$$\mathcal{B} = \left\{\cup_{j \in J} A_j : J \subset \{1, \ldots, n\}\right\}.$$
De plus, si $\mathbb{P}(A_i) \neq 0$ pour tout i et si X est une v.a.r intégrable, alors on a
$$\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{A_j} X\right)}{\mathbb{P}(A_j)} \mathbb{1}_{A_j} \text{ p.s.}$$
3. Plus généralement, si Y est une variable aléatoire discrète et à valeurs dans un ensemble E fini ou infini dénombrable, alors
$$\mathbb{E}(X|\sigma(Y)) = \sum_{y \in E : \mathbb{P}(Y=y)>0} \frac{\mathbb{E}\left(X \mathbb{1}_{Y=y}\right)}{\mathbb{P}(Y=y)} \mathbb{1}_{Y=y},$$
pour toute v.a.r X intégrable.

Remarque. La relation (1.3) peut être utilisée pour trouver l'espérance conditionnelle. Mais on peut se contenter de vérifier la relation (1.3) uniquement pour des évènements $B \in C$ où C est une classe d'évènements stable par intersection finie (on parle de π-système) et qui engendre $\mathcal{B}$. Par exemple si $\mathcal{B} = \sigma(Y)$ avec Y une v.a.r, on peut utiliser $C = \{\{Y \leq t\} : t \in \mathbb{R}\}$.

1.1.2 Deux méthodes de calcul lorsque $\mathcal{B}$ est engendrée par une variable aléatoire

1. Lorsque la sous-tribu $\mathcal{B}$ est engendrée par une variable aléatoire Y à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, on note $\mathcal{B} = \sigma(Y)$ et l'espérance conditionnelle est notée simplement $\mathbb{E}(X|Y)$. L'exemple 3 donné précédemment montre que $\mathbb{E}(X|Y)$ coïncide avec la variable aléatoire $r(Y)$ où $r : E \to \mathbb{R}$ est l'application définie par $r(y) = \mathbb{E}(X|Y = y)$ (moyenne de la loi conditionnelle de X sachant $Y = y$). Cette propriété se généralise. Pour tout couple (X, Y) à valeurs dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ et tel que $X \in \mathbb{L}^1(\mathcal{A})$, on a $\mathbb{E}(X|Y) = r(Y)$ où $r(y)$ désigne la moyenne de la loi conditionnelle de X sachant $Y = y$. Par exemple, si (X, Y) est de loi uniforme sur
$$T = \left\{(x, y) \in [0, 1]^2 : x + y \leq 1\right\},$$
on peut ainsi montrer que $\mathbb{E}(X|Y) = \frac{1-Y}{2}$.

2. Lorsque $X = F(U, Y)$ où U est une variable aléatoire indépendante de Y et $F : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est une fonction mesurable, alors $\mathbb{E}(X|Y) = h(Y)$ p.s où $h(y) = \mathbb{E}(F(U, y))$. Par exemple, si $F(u, y) = \sqrt{u + y}$ avec U de loi uniforme sur $[0, 1]$ et Y une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, alors on trouve $\mathbb{E}(X|Y) = \frac{2}{3}(1 + Y)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}Y^{\frac{3}{2}}$.

1.1.3 Propriétés fondamentales de l'espérance conditionnelle

Les propriétés suivantes sont fréquemment utilisées lors de certains calculs.

Proposition 1 *1. Linéarité.* $\forall a, b \in R$,

$$\mathbb{E}(aX + bX'|\mathcal{B}) = a\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) + b\mathbb{E}(X'|\mathcal{B}) \ \textit{p.s.}$$

2. *On a* $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{B})) = \mathbb{E}(X)$.
3. *Si X est $\mathcal{B}$-mesurable, alors $\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) = X$ p.s. C'est en particulier le cas si X est constante p.s.*
4. *Si X est indépendante de $\mathcal{B}$, alors $\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) = \mathbb{E}(X)$ p.s.*
5. *Si X' est $\mathcal{B}$-mesurable, X et $X'X$ sont intégrables, alors $\mathbb{E}(XX'|\mathcal{B}) = X'\mathbb{E}(X|\mathcal{B})$ p.s.*
6. *Si $X \leq X'$ p.s., $\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) \leq \mathbb{E}(X'|\mathcal{B})$ p.s.*
7. *Si $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont deux sous-tribus de $\mathcal{A}$ telles que $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2$, alors*

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{B}_1) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{B}_1)|\mathcal{B}_2) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{B}_2)|\mathcal{B}_1).$$

8. *Si X et $\mathcal{B}_1$ sont indépendantes de $\mathcal{B}_2$, alors $\mathbb{E}(X|\mathcal{B}_1 \vee \mathcal{B}_2) = \mathbb{E}(X|\mathcal{B}_1)$ p.s.*

Proposition 2 (Inégalité de Jensen) *Soient $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe, $X \in \mathbb{L}^1(\mathcal{A})$ une v.a.r et $\mathcal{B}$ une sous-tribu. Si $\mathbb{E}|\varphi(X)| < \infty$, alors $\varphi(\mathbb{E}(X|\mathcal{B})) \leq \mathbb{E}(\varphi(X)|\mathcal{B})$ p.s.*

L'inégalité de Jensen permet d'obtenir des inégalités du type $|\mathbb{E}(X|\mathcal{B})| \leq \mathbb{E}(|X||\mathcal{B})$ ou encore $\mathbb{E}^2(X|\mathcal{B}) \leq \mathbb{E}\left(X^2|\mathcal{B}\right)$ lorsque X est de carré intégrable.

Les théorèmes de convergence usuels pour les suites d'espérances s'étendent au cas des suites d'espérances conditionnelles.

Proposition 3 *Soient $(X_n)_n$ une suite de v.a.r intégrables, X une v.a.r et $\mathcal{B}$ une sous-tribu.*

1. Propriété de Beppo-Lévi *: si $0 \leq X_n \nearrow X$ lorsque $n \nearrow \infty$ et $\mathbb{E}|X| < \infty$, alors $\mathbb{E}(X_n|\mathcal{B}) \nearrow \mathbb{E}(X|\mathcal{B})$ p.s. lorsque $n \nearrow \infty$.*
2. Propriété de Lebesgue *: si $X_n \to X$ lorsque $n \to \infty$ et $\mathbb{E}\sup_n |X_n| < \infty$, alors $\mathbb{E}(|X_n - X||\mathcal{B}) \to 0$ p.s. lorsque $n \to \infty$.*
3. Propriété de Fatou *: si $X_n \geq 0$ p.s. pour tout n et si $\mathbb{E}|\liminf_n X_n| < \infty$, alors $\mathbb{E}(\liminf_n X_n|\mathcal{B}) \leq \liminf_n \mathbb{E}(X_n|\mathcal{B})$ p.s.*

Terminons par la définition de la variance conditionnelle.

Définition 3 *Si X est une v.a.r de carré intégrable, la variable aléatoire $\mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X|\mathcal{B}))^2 |\mathcal{B}\right)$ est appelée variance conditionnelle de X sachant $\mathcal{B}$ et est notée Var $(X|\mathcal{B})$.*

On a également

$$\text{Var } (X|\mathcal{B}) = \mathbb{E}\left(X^2|\mathcal{B}\right) - \mathbb{E}^2(X|\mathcal{B}).$$

Exemple. Soit (A, B) un couple de v.a.r intégrables, indépendant d'une v.a.r intégrable Y. Alors, si $X = AY + B$, on a $\mathbb{E}(X|Y) = \mathbb{E}(A)Y + \mathbb{E}(B)$. Si de plus, les trois v.a.r précédentes sont de carré intégrable alors $\text{Var}(X|Y) = \text{Var}(A)Y^2 + 2\text{Cov}(A, B)Y + \text{Var}(B)$.

1.2 Processus stochastiques à temps discret

Notations. On notera par $a \wedge b$ le minimum de deux réels a et b (éventuellement égaux à $+\infty$) et par $a \vee b$ leur maximum. De plus, si $f, g : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ sont deux fonctions, on notera $f \wedge g$ (resp. $f \vee g$) la fonction $\omega \mapsto f(\omega) \wedge g(\omega)$ (resp. $\omega \mapsto f(\omega) \vee g(\omega)$).

Définition 4 *Un processus stochastique à temps discret est une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires toutes à valeurs dans $\mathbb{R}^d$.*

Définition 5 *Une suite $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-tribus de $\mathcal{A}$, croissante pour l'inclusion est appelée filtration.*

Dans la suite, on se donne une filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on note $\mathcal{F}_\infty = \sigma\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathcal{F}_n\right)$

Définition 6 *Un processus $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est adapté (relativement à la filtration $\mathcal{F}$) si pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n est $\mathcal{F}_n$−mesurable.*

Remarques

– La plus petite filtration (au sens de l'inclusion) pour laquelle un processus $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est adapté est définie par

$$\mathcal{F}_n = \sigma\left(X_j : j = 0, \ldots, n\right).$$

On parle de filtration naturelle.

– Il faut voir un processus comme une suite de variables aléatoires qui représentent un phénomène évolutif dans le temps. Pour la notion de filtration, on peut voir $\mathcal{F}_n$ comme l'information disponible au temps n.

Exemples basiques

1. Une suite de variables aléatoires i.i.d à valeurs dans $\mathbb{R}^d$.
2. Une marche aléatoire $S_n = x + Z_1 + \ldots + Z_n$ où $(Z_i)_{i\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires i.i.d et à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. La filtration naturelle de $(S_n)_n$ coïncide avec la filtration naturelle de la suite $(Z_n)_n$.

3. Les modèles de séries temporelles tels que les modèles ARMA. Prenons l'exemple du modèle AR à p retards défini par

$$X_n = a_1 X_{n-1} + \ldots + a_p X_{n-p} + \epsilon_n,$$

   où $(\epsilon_n)_n$ est une suite de variables aléatoires i.i.d tel que $\mathbb{E}(\epsilon_0) = 0$ et $\mathbb{E}\left(\epsilon_0^2\right) = \sigma^2 < \infty$. Ce type de processus est souvent utlisé dans le cadre de la prévision. Dans ce cas, si $X_0, \ldots, X_n$ sont observées , on peut prévoir X_{n+1} par

$$\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \sum_{j=1}^{p} a_j X_{n+1-j}.$$

   L'erreur quadratique moyenne de prévision est donnée par

$$\mathbb{E}(X_{n+1} - \mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n))^2 = \sigma^2.$$

Dans la suite, on se donne un processus $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ adapté à une filtration $\mathcal{F}$.

Définition 7 *Une variable aléatoire* $T : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ *est appelé temps d'arrêt si pour tout* $n \in \mathbb{N}$,

$$\{T = n\} \in \mathcal{F}_n.$$

Une conséquence de la définition précédente est que $\{T = +\infty\} \in \mathcal{F}_\infty$. En effet, on a

$$\{T = +\infty\} = \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \{T = n\}\right)^c.$$

Proposition 4 *Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *T est un temps d'arrêt.*
2. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'évènement $\{T \leq n\}$ appartient à $\mathcal{F}_n$.*
3. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'évènement $\{T > n\}$ appartient à $\mathcal{F}_n$.*

Preuve. $1 \Rightarrow 2$. Si $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\{T \leq n\} = \bigcup_{i=0}^{n} \{T = i\}$$

qui est bien un évènement de $\mathcal{F}_n$ en tant que réunion finie d'évènements de $\mathcal{F}_n$.
$2 \Rightarrow 3$. Si $n \in \mathbb{N}$, on a $\{T > n\} = \{T \leq n\}^c$ qui appartient à $\mathcal{F}_n$ en tant que complémentaire d'un évènement de $\mathcal{F}_n$.
$3 \Rightarrow 1$. On utilise les égalités $\{T = 0\} = \{T > 0\}^c$ et $\{T = n\} = \{T > n-1\} \setminus \{T > n\}$ pour $n \geq 1$. □

Exemples

- Si T est constant et égal à $a \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, alors T est un temps d'arrêt.
- Si A est un borélien de $\mathbb{R}^d$, le temps d'entrée d'un processus adapté X dans A,
$$T_A = \inf \{n \in \mathbb{N} : X_n \in A\}$$
(avec la convention $\inf \emptyset = +\infty$) est un temps d'arrêt.
- On peut également définir les temps de retour successifs dans un borélien A. Pour cela, on pose $T_A^{(0)} = 0$ et si $k \in \mathbb{N}$,
$$T_A^{(k+1)} = \inf \left\{n > T_A^{(k)} : X_n \in A\right\}.$$
On convient que $T_A^{(k+1)}(\omega) = +\infty$ lorsque $T_A^{(k)}(\omega) = +\infty$. Alors la suite $\left(T_A^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de temps d'arrêt (noter que $T_A^{(k)}$ ne prend que des valeurs $\geq k$). La croissance est immédiate. La propriété de temps d'arrêt peut alors se voir par récurrence puisque si $k \geq 1$ et $n \geq k$:
$$\left\{T_A^{(k)} = n\right\} = \bigcup_{j=k-1}^{n-1} \left\{T_A^{(k-1)} = j, X_{j+1} \notin A, \ldots, X_{n-1} \notin A, X_n \in A\right\}.$$
On voit donc que $T_A^{(k)}$ est un temps d'arrêt si $T_A^{(k-1)}$ l'est aussi.
- Le temps de dernier passage dans A,
$$\tau_A = \sup \{n \in \mathbb{N} : X_n \in A\}$$
(avec la convention $\sup \emptyset = 0$) n'est pas un temps d'arrêt en général.
- Pour un processus adapté $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, le temps
$$T = \inf \{n \geq 1 : X_n > \max (X_0, \ldots, X_{n-1})\}$$
est un temps d'arrêt. C'est le temps de premier record. On peut également définir les temps successifs pour lesquels on obtient des nouveaux records.

Exercice. Nous allons montrer que si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires i.i.d et toutes de même loi de Bernoulli de paramètre p $(0 < p < 1)$, alors les temps de retour notés $T_1, T_2, \ldots$ au point 1 de cette suite sont finis p.s et que la suite $(T_{k+1} - T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ (avec la convention $T_0 = 0$) est une suite de variables aléatoires i.i.d toutes de même loi géométrique de paramètre p sur $\mathbb{N}^*$.
Remarquons d'abord que si $k \in \mathbb{N}^*$, alors
$$\{T_k = +\infty\} \subset \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{p\geq n} \{X_p = 0\}.$$
Comme pour tout $n \geq 1$, $\bigcap_{p\geq n} \{X_p = 0\}$ est de probabilité nulle, il est en est de même pour la réunion de ces ensembles. On en déduit que $\mathbb{P}(T_k = +\infty) = 0$ et donc que $T_k < +\infty$ p.s. Pour $k \geq 2$ et des

entiers $j_1, j_2, \ldots, j_k > 0$, nous avons (en notant $s_\ell = j_1 + \cdots + j_\ell$ pour $1 \leq \ell \leq k$)

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}\left(T_1 = j_1, \ldots, T_k - T_{k-1} = j_k\right) \\
= \; & \mathbb{P}\left(\{X_{s_1} = X_{s_2} = \cdots = X_{s_k} = 1\} \cap \bigcap_{\substack{1 \leq j < s_k \\ j \neq s_1, \ldots, s_{k-1}}} \left\{X_j = 0\right\}\right) \\
= \; & p(1-p)^{j_1 - 1} \times \cdots \times p(1-p)^{j_k - 1}.
\end{aligned}$$

On obtient bien une suite de v.a i.i.d toutes de loi $\mathcal{G}_{\mathbb{N}^*}(p)$.

Proposition 5 *Si $T_1, \ldots, T_k$ sont des temps d'arrêt, alors $\bigwedge_{1 \leq i \leq k} T_i$, $\bigvee_{1 \leq i \leq k} T_i$ et $\sum_{i=1}^k T_i$ sont des temps d'arrêt. En particulier, si T est un temps d'arrêt, alors pour tout entier $j \in \mathbb{N}$, $T \wedge j$ est un temps d'arrêt borné.*

Preuve. Il suffit d'appliquer la Proposition 4 et d'utiliser les égalités suivantes.

$$\left\{\bigwedge_{1 \leq i \leq k} T_i \leq n\right\} = \bigcup_{i=1}^k \{T_i \leq n\},$$

$$\left\{\bigvee_{1 \leq i \leq k} T_i \leq n\right\} = \bigcap_{i=1}^k \{T_i \leq n\},$$

$$\left\{\sum_{i=1}^k T_i = n\right\} = \bigcup_{\substack{0 \leq n_1, \ldots, n_k \leq n \\ n_1 + \cdots + n_k = n}} \{T_1 = n_1, \ldots, T_k = n_k\}. \square$$

Définition 8 *Si T est un temps d'arrêt, la tribu*

$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F}_\infty : A \cap \{T = n\} \in \mathcal{F}_n\}$$

est appelée tribu des évènements antérieurs à T.

Remarques

- T est $\mathcal{F}_T$−mesurable.
- Si T est un temps d'arrêt fini p.s, on définit une v.a X_T par $X_T(\omega) = X_{T(\omega)}(\omega)$ si $T(\omega) < +\infty$ et par $X_T(\omega) = U(\omega)$ si $T(\omega) = +\infty$ où U est une v.a $\mathcal{F}_\infty$−mesurable arbitraire. Alors on a

  $$X_T = \sum_{n=0}^{+\infty} X_n \mathbb{1}_{T=n} \text{ p.s.}$$

  De plus X_T est une v.a $\mathcal{F}_T$−mesurable. Ceci résulte de l'égalité

  $$\{X_T \in C\} \cap \{T = n\} = \{X_n \in C\} \cap \{T = n\} \in \mathcal{F}_n$$

  pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $C \in \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)$. Plus généralement, on peut montrer qu'une variable aléatoire Z, $\mathcal{F}_\infty$−mesurable, est $\mathcal{F}_T$−mesurable si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Z\mathbb{1}_{T=n}$ est $\mathcal{F}_n$−mesurable.

– Lorsque $\mathcal{F}$ est la filtration naturelle du processus, on peut montrer que

$$\mathcal{F}_T = \sigma\left(X_{n\wedge T} : n \in \mathbb{N}\right).$$

Proposition 6 *Soient S et T deux temps d'arrêt. Alors $\mathcal{F}_{S\wedge T} = \mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T$. En particulier lorsque $S \leq T$, on a $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$.*

Preuve.

– Montrons d'abord que $\mathcal{F}_{S\wedge T} \subset \mathcal{F}_S$. Soit $A \in \mathcal{F}_{S\wedge T}$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$A \cap \{S = n\} = A \cap \{S \wedge T \leq n\} \cap \{S = n\} = \bigcup_{j=0}^{n} \left(A \cap \{S \wedge T = j\} \cap \{S = n\}\right).$$

Comme $A \cap \{S \wedge T = j\} \in \mathcal{F}_j \subset \mathcal{F}_n$ pour $j = 0, \ldots, n$, on voit facilement que $A \cap \{S = n\} \in \mathcal{F}_n$.

– En échangeant le rôle de S et de T dans le point précédent, on a également $\mathcal{F}_{S\wedge T} \subset \mathcal{F}_T$.

– Montrons ensuite que si $A \in \mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T$, alors $A \in \mathcal{F}_{S\wedge T}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$A \cap \{S \wedge T = n\} = \left(A \cap \{S = n\} \cap \{S \wedge T = n\}\right) \cup \left(A \cap \{T = n\} \cap \{S \wedge T = n\}\right).$$

Comme $A \cap \{S = n\}$, $A \cap \{T = n\}$ et $\{S \wedge T = n\}$ sont dans $\mathcal{F}_n$, on a bien $A \cap \{S \wedge T = n\} \in \mathcal{F}_n$.
Les trois points précédents justifient l'égalité des deux tribus. Justifions ensuite l'inclusion annoncée. Si $S \leq T$, on obtient

$$\mathcal{F}_S = \mathcal{F}_{S\wedge T} = \mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T \subset \mathcal{F}_T,$$

ce qui achève la preuve.□

1.3 Exercices

Exercice 1 Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^d$ respectivement. On suppose X de carré intégrable. Montrer la formule

$$\operatorname{Var}(X) = \mathbb{E}\left(\operatorname{Var}(X|Y)\right) + \operatorname{Var}\left(\mathbb{E}(X|Y)\right).$$

Exercice 2

1. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles, indépendantes et de même loi $\mathcal{E}(\lambda)$, avec $\lambda > 0$. Calculer $\mathbb{E}(\sup(X, Y)|X)$. En déduire $\mathbb{E}(\inf(X, Y)|X)$.
2. Soient $X_1, X_2, \cdots$ des variables aléatoires i.i.d et intégrables. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ pour $n \geq 1$.
   (a) Soit $n \geq 1$. Montrer que
   $$\mathbb{E}\left(X_1|S_n\right) = \frac{S_n}{n} \text{ p.s.}$$
   (b) Lorsque les variables sont toutes de loi uniforme sur $[0, 1]$, calculer $\mathbb{E}(X_1|S)$ où $S = \sup(X_1, \cdots, X_n)$.

(c) Soit N une variable aléatoire à valeurs entières et indépendante de la suite $X_1, X_2, \cdots$. Donner une expression de $\mathbb{E}(S_N|N)$.

Exercice 3 On considère une sous-tribu $\mathcal{B}$ et deux variables aléatoires X et Y telle que
- $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$,
- X est $\mathcal{B}-$mesurable,
- les sous-tribus $\sigma(Y)$ et $\mathcal{B}$ sont indépendantes.

1. Montrer les équivalences

$$\mathbb{E}\exp(XY) < \infty \Leftrightarrow \mathbb{E}\exp(|XY|) < \infty \Leftrightarrow \mathbb{E}\exp\left(\frac{X^2}{2}\right) < \infty.$$

2. Lorsque l'une des trois conditions précédentes est vérifiée, calculer l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(\exp(XY)|\mathcal{B})$.

Exercice 4 Soit (X,Y) un vecteur gaussien de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^k$ tel que la matrice de variance-covariance $\mathrm{Var}(Y)$ soit inversible. Déterminer $\mathbb{E}(X|Y)$ ainsi que $\mathrm{Var}(X|Y)$. On pourra commencer par trouver une écriture du type

$$X = CY + Z,$$

avec C une matrice ligne de taille $1\times k$ et Z une variable aléatoire décorrélée avec Y.

Exercice 5 *(séries temporelles)*

1. On considère le processus AR(1) à valeurs réelles défini par l'équation

$$X_t = aX_{t-1} + b + Z_t, \quad t \geq 1$$

et $X_0 = x_0$ est déterministe. On suppose que $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ est adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{N}}$ et que Z est intégrable avec

$$\mathbb{E}(Z_t|\mathcal{F}_{t-1}) = 0, \quad t \geq 1.$$

Déterminer une expression de $\mathbb{E}(X_{t+h}|\mathcal{F}_t)$ pour tout $h \geq 1$.

2. On considère maintenant un processus ARCH (autorégressif conditionnellement hétéroscédastique) d'ordre 1 défini par

$$X_t = \xi_t\sqrt{b + aX_{t-1}^2}, \quad t \geq 1,$$

avec $(\xi_t)_{t\geq 1}$ une suite i.i.d de variables aléatoires centrées et de variance 1 et a, b deux réels positifs. On considère toujours que $X_0 = x_0$ est déterministe et on note $\mathcal{F}$ la filtration naturelle du processus.

(a) Déterminer $\mathbb{E}(X_{t+h}|\mathcal{F}_t)$ lorsque $(t,h)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$.

(b) Déterminer également $\mathbb{E}\left(X_{t+h}^2|\mathcal{F}_t\right)$ lorsque $(t,h)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$. Montrer aussi que la suite $\left(X_t^2\right)_{t\in\mathbb{N}}$ vérifie l'équation du processus AR(1) de la question 1.

EXERCICE 6

1. Soit $(X_n)_n$ le processus défini par

$$X_n = \sum_{i=0}^{n} a_i \xi_i, \quad n \in \mathbb{N},$$

où ξ est une suite i.i.d de variables aléatoires centrées et de carré intégrable et $(a_i)_i$ une suite de nombres réels de carrés sommables. Montrer que la suite $(X_n)_n$ converge en moyenne quadratique.

2. Plus généralement, soit $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ une filtration et $(X_n)_{n\geq 0}$ un processus stochastique $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$-adapté et à valeurs réelles. On suppose que pour chaque $n \geq 0$: $\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n$ p.s. (martingale).
   (a) Montrer que pour tous $n, p \geq 0$: $\mathbb{E}\left(X_{n+p}|\mathcal{F}_n\right) = X_n$ p.s.
   (b) Montrer que pour tous $n > p \geq 0$:

$$\mathbb{E}\left(X_n - X_p\right)^2 = \mathbb{E}X_n^2 - \mathbb{E}X_p^2 = \sum_{i=p}^{n-1} \mathbb{E}\left(X_{i+1} - X_i\right)^2.$$

   En déduire que $(X_n)_n$ converge en moyenne quadratique si $(X_n^2)_n$ est bornée dans L^1.

EXERCICE 7 *(Simulation par la méthode du rejet)*

On souhaite simuler une réalisation (ou plusieurs) d'une variable aléatoire de densité $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ (par rapport à la mesure de Lebesgue) de forme analytique compliquée à partir d'une densité g de forme analytique plus simple. Pour cela, on suppose qu'il existe $M \geq 1$ tel que

$$f(x) \leq Mg(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

1. Soit X une variable aléatoire de loi à densité g, indépendante d'une variable aléatoire Y de loi uniforme sur $[0, M]$. Pour toute fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ mesurable bornée, calculer $\mathbb{E}\left(h(X)\mathbb{1}_{f(X)\geq Yg(X)}\right)$.

2. On se donne une suite de couples de variables aléatoires i.i.d $(X_n, Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, (X_n, Y_n) ait la même loi que (X, Y). Soit

$$T_1 = \inf\{n \geq 1 : f(X_n) \geq Y_n g(X_n)\}$$

et pour tout entier $k \geq 2$,

$$T_k = \inf\{n > T_{k-1} : f(X_n) \geq Y_n g(X_n)\},$$

avec la convention $\inf \emptyset = \infty$.
   (a) Montrer que les variables aléatoires T_k sont des temps d'arrêt finis presque sûrement, pour une filtration que l'on précisera.
   (b) Déterminer la loi de T_1, $\mathbb{E}(T_1)$ et préciser la loi de X_{T_1}.
   (c) Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable bornée. On pose pour tout $n \geq 1$, $\mathcal{F}_n = \sigma\left((X_j, Y_j) : 1 \leq j \leq n\right)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $\mathbb{E}\left(h\left(X_{T_{k+1}}\right)\mathbb{1}_{T_k=n}|\mathcal{F}_n\right)$ puis $\mathbb{E}\left(h\left(X_{T_{k+1}}\right)|\mathcal{F}_{T_k}\right)$. En déduire que $(X_{T_k})_{k\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires i.i.d, toutes de loi à densité f.

Chapitre 2

Martingales à temps discret

2.1 Définition des martingales

On suppose donnée une filtration $\mathcal{F}$.

Définition 9 *On dit qu'une suite de v.a.r $(X_n)_n$ est une martingale (resp. sous-martingale, sur-martingale) si*

1. *Pour tout n, la variables X_n est intégrable.*
2. *Le processus $(X_n)_n$ est adapté.*
3. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$,*
$$\mathbb{E}\left(X_{n+1}|\mathcal{F}_n\right) = X_n \text{ (resp. } \geq X_n, \leq X_n).$$

On voit alors que l'espérance d'une martingale (resp. sous-martingale, sur-martingale) est constante (resp. croissante, décroissante). De plus pour tout $m \geq n$, on déduit de la défintion précédente que $\mathbb{E}\left(X_m|\mathcal{F}_n\right) = X_n$ (resp. $\geq X_n$, $\leq X_n$). Remarquons aussi que $(X_n)_n$ est une sous-martingale si et seulement $(-X_n)_n$ est une sur-martingale.

Exemples

1. Un exemple fondamental est celui des marches aléatoires. Soient $(X_n)_n$ une suite de v.a.r indépendantes et intégrables et $\mathcal{F}$ la filtration naturelle associée. On pose
$$S_n = X_0 + \ldots + X_n.$$
Si pour tout $n \geq 1$, $\mathbb{E}(X_n) = 0$ (resp. $\mathbb{E}(X_n) \geq 0$, $\mathbb{E}(X_n) \leq 0$), alors $(S_n)_n$ est une martingale (resp. sous-martingale, sur-martingale).
2. Si maintenant $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite de v.a.r centrées, i.i.d et de carré intégrable. Toujours en considérant la filtration naturelle associée à cette suite, le processus $(U_n)_n$ défini par $U_n = S_n^2 - n\sigma^2$, avec $\sigma^2 = \mathbb{E}X_1^2$, est une martingale.

3. On suppose maintenant que $X_0 = 0$ et que $X_1, X_2, \ldots$ sont des v.a.r i.i.d telles que

$$\exp(g(\alpha)) = \mathbb{E}(\exp(\alpha X_1)) < \infty,$$

pour un certain réel α. Alors le processus $(M_n^\alpha)_n$ défini par $M_n^\alpha = \exp(\alpha S_n - ng(\alpha))$ pour $n \in \mathbb{N}$ est une martingale. Plus généralement, si $M_n = Y_0 \cdots Y_n$ est un produit de v.a.r indépendantes, intégrables et d'espérance 1, alors la suite $(M_n)_n$ est une martingale pour la filtration naturelle associée.

4. Soit Y est une v.a.r intégrable. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $X_n = \mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_n)$. Alors $(X_n)_n$ est une martingale bornée dans $\mathbb{L}^1$ (c'est à dire $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}|X_n| < +\infty$). Nous verrons plus tard que sous une certaine condition, on peut représenter une martingale de cette façon. On parle de martingale **régulière**.

5. On peut construire une martingale à partir d'un processus $(X_n)_n$ adapté et intégrable de la façon suivante. Posons $Y_0 = X_0$ et si $n \geq 1$, $Y_n = X_0 + \sum_{i=1}^n (X_i - \mathbb{E}(X_i|\mathcal{F}_{i-1}))$. Alors $(Y_n)_n$ est une martingale. Lorsque les variables X_n sont indépendantes, on a $Y_n = X_0 + \sum_{i=1}^n (X_i - \mathbb{E}(X_i))$ pour tout $n \geq 1$.

Proposition 7 *1. Si $(X_n)_n$ est une martingale et $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction convexe telle que $\phi(X_n)$ soit intégrable pour tout n, alors $(\phi(X_n))_n$ est une sous-martingale.*

2. Si $(X_n)_n$ est une sous-martingale et $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction convexe croissante telle que $\phi(X_n)$ soit intégrable pour tout n, alors $(\phi(X_n))_n$ est une sous-martingale.

Preuve. C'est immédiat en utilisant l'inégalité de Jensen.□

2.2 Premier théorème d'arrêt

Théorème 1 (Théorème d'arrêt de Doob, première version) *On suppose que $(X_n)_n$ est une martingale (resp. sous-martingale, sur-martingale). Soient S et T deux temps d'arrêt bornés tels que $S \leq T$. Alors $\mathbb{E}(X_T|\mathcal{F}_S) = X_S$ (resp. $\geq, \leq$).*

Preuve. Montrons-le pour les martingales, le cas des (sous-, sur)-martingales étant similaire. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $T(\omega) \leq N$ pour tout $\omega \in \Omega$. Comme

$$|X_T| = \sum_{n=0}^{N} |X_n| \mathbb{1}_{T=n},$$

on obtient

$$\mathbb{E}|X_T| \leq (N+1) \max_{0\leq n\leq N} \mathbb{E}|X_n|,$$

ce qui montre que la v.a.r X_T est intégrable. Soit maintenant $A \in \mathcal{F}_S$. Il suffit de montrer que

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_A X_T) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A X_S). \tag{2.1}$$

On a

$$\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_A X_T\right) = \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=n}^{N} \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{A\cap\{S=n\}\cap\{T=m\}} X_m\right).$$

Comme pour $n \leq m$, $A \cap \{S = n\} \in \mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_m$ par définition de la tribu $\mathcal{F}_S$ et $\{T = m\} \in \mathcal{F}_m$, la propriété de martingale assure que

$$\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{A\cap\{S=n\}\cap\{T=m\}} X_m\right) = \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{A\cap\{S=n\}\cap\{T=m\}} X_N\right).$$

On en déduit alors que

$$\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_A X_T\right) = \sum_{n=0}^{N} \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{A\cap\{S=n\}} X_N\right).$$

En utilisant de nouveau la propriété de martingale et le fait que $A \cap \{S = n\} \in \mathcal{F}_n$, on obtient

$$\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_A X_T\right) = \sum_{n=0}^{N} \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{A\cap\{S=n\}} X_n\right).$$

Cette dernière égalité coïncide avec l'égalité (2.1).□

Donnons deux conséquences de ce résultat pour les martingales.

Proposition 8 *Les deux assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *$(X_n)_n$ est une martingale.*
2. *Pour tout temps d'arrêt T borné, X_T est intégrable et $\mathbb{E}(X_T) = \mathbb{E}(X_0)$.*

Preuve. 1. $\Rightarrow$ 2. L'intégrabilité de X_T a déjà été prouvée. En appliquant le Théorème d'arrêt avec $S = 0$, on obtient l'égalité $\mathbb{E}\left(X_T|\mathcal{F}_0\right) = X_0$. On obtient le résultat en prenant l'espérance dans l'égalité précédente.
2. $\Rightarrow$ 1. En prenant $T = n$ en voit que X_n est intégrable. Si $A \in \mathcal{F}_n$, on pose $T = n\mathbb{1}_{A^c} + (n+1)\mathbb{1}_A$. Alors T est un temps d'arrêt borné. Par hypothèse, on a $\mathbb{E}\left(X_T\right) = \mathbb{E}(X_0)$. En posant $S = n$, on voit aussi que $\mathbb{E}(X_0) = \mathbb{E}(X_n)$. L'égalité $\mathbb{E}\left(X_T\right) = \mathbb{E}\left(X_n\right)$ s'écrit aussi

$$\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{A^c} X_n\right) + \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_A X_{n+1}\right) = \mathbb{E}(X_n).$$

On en déduit que $\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_A X_n\right) = \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_A X_{n+1}\right)$. Comme $A \in \mathcal{F}_n$ est arbitraire, on conclut que $\mathbb{E}\left(X_{n+1}|\mathcal{F}_n\right) = X_n$ p.s. $(X_n)_n$ est bien une martingale.□

Corollaire 1 *Soient $(X_n)_n$ une martingale et T un temps d'arrêt quelconque. On note X^T le processus adapté défini par $X_n^T = X_{T\wedge n}$. Alors X^T est une martingale.*

Preuve. Comme X_n^T est $\mathcal{F}_{T\wedge n}$ mesurable et $\mathcal{F}_{T\wedge n} \subset \mathcal{F}_n$, on voit que $\left(X_n^T\right)_n$ est adapté. Nous allons ensuite utiliser la proposition précédente. Soit S est un temps d'arrêt borné. Alors $S \wedge T$ est aussi un temps d'arrêt borné. L'intégrabilité de X_S^T est claire. De plus le point 2 de la proposition précédente appliqué à la martingale $(X_n)_n$ entraine que

$$\mathbb{E}\left(X_S^T\right) = \mathbb{E}\left(X_{T\wedge S}\right) = \mathbb{E}\left(X_0\right) = \mathbb{E}\left(X_0^T\right).$$

Le processus adapté X^T vérifie donc le point 2 de la proposition précédente. On en déduit alors le résultat.□

Exemple d'utilisation : la ruine du joueur. Un joueur joue à pile ou face avec une pièce équilibrée. Sa fortune initiale est a et celle de la "banque" est de b euros (a et b sont des entiers strictement positifs). Si le joueur obtient pile (resp. face), la banque lui verse (resp. prend) 1 euro. On suppose les parties indépendantes entre elles. Alors le gain X_n du joueur A après n parties est $S_n = a + Y_1 + \ldots + Y_n$ où $(Y_i)_{i\geq 1}$ est une suite de v.a i.i.d avec $\mathbb{P}(Y_1 = 1) = \mathbb{P}(Y_1 = -1) = \frac{1}{2}$. $(S_n)_n$ est donc une martingale pour sa filtration naturelle. La partie s'arrête au bout d'un temps aléatoire T défini par

$$T = \inf\left\{n \geq 1 : S_n \in \{0, a+b\}\right\}.$$

L'objectif est de calculer $\mathbb{P}\left(S_T = a+b\right)$ (probabilité que le joueur A gagne) ainsi que $\mathbb{E}(T)$. Nous allons d'abord montrer que T est fini presque sûrement. Le processus $(M_n = S_n^2 - n)_n$ est une martingale. En appliquant le théorème d'arrêt pour le temps borné $T\wedge n$ (ou en utilisant directement la martingale arrêtée), on voit que

$$\mathbb{E}\left(S_{n\wedge T}^2 - n \wedge T\right) = \mathbb{E}(S_0^2) = a^2. \tag{2.2}$$

Comme $S_{n\wedge T}^2 \leq (a+b)^2$, on en déduit que

$$\mathbb{E}\left(T \wedge n\right) \leq (a+b)^2 - a^2.$$

Le théorème de convergence monotone assure que

$$\mathbb{E}(T) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(T \wedge n\right) \leq (a+b)^2 - a^2.$$

Ceci prouve que T est intégrable et T est donc fini p.s.

Considérons maintenant la martingale arrêtée S^T qui converge p.s vers S_T (vu que T est fini p.s). Alors on a $0 \leq S_{n\wedge T} \leq a+b$. Le Théorème de convergence de Lebesgue (convergence dominée) assure alors que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}S_{T\wedge n} = \mathbb{E}S_T = (a+b)\mathbb{P}\left(S_T = a+b\right).$$

Mais le théorème d'arrêt assure aussi que $\mathbb{E}\left(S_{T\wedge n}\right) = a$. En passant à la limite, on voit qu'on a également $\mathbb{E}(S_T) = a$. Nous pouvons conclure que $\mathbb{P}\left(S_T = a+b\right) = \frac{a}{a+b}$. On en déduit que $\mathbb{P}\left(S_T = 0\right) = \frac{b}{a+b}$. De plus en passant à la limite dans (2.2), on obtient

$$\mathbb{E}(T) = \mathbb{E}\left(S_T^2\right) - a^2 = a(a+b) - a^2 = ab.$$

Attention. Ici, il faut bien se garder d'appliquer le théorème d'arrêt pour un temps d'arrêt fini p.s mais non borné (on verra plus loin dans le cours une extension du théorème d'arrêt pour des temps d'arrêt non bornés). Si dans l'exemple précédent, on définit le temps d'arrêt

$$\tau = \inf\{n \geq 1 : S_n = 0\},$$

et qu'on renote $T_{a,b}$ le temps d'arrêt T précédent, on voit que

$$\{\tau = +\infty\} = \cap_{b=1}^{\infty} \left\{S_{T_{a,b}} = a + b\right\}.$$

Comme $\left\{S_{T_{a,b+1}} = a + b + 1\right\} \subset \left\{S_{T_{a,b}} = a + b\right\}$, on obtient

$$\mathbb{P}(\tau = +\infty) = \lim_{b\to\infty} \mathbb{P}\left(S_{T_{a,b}} = a + b\right) = 0.$$

Ainsi τ est fini p.s et donc $S_\tau = 0$ p.s. Comme $S_0 = a$, on a $\mathbb{E}(S_0) \neq \mathbb{E}(S_\tau)$. En particulier comme

$$\mathbb{E}(S_{n\wedge\tau}) = \mathbb{E}(S_0) = a \neq 0 = \mathbb{E}(S_\tau),$$

on voit que $(S_n)_n$ ne possède pas les propriétés requises pour inverser limite sur n et espérance.

Utilisation des martingales pour le test séquentiel de Wald. Une usine produit des composants électroniques qui peuvent être défectueux à leur sortie de la chaîne de fabrication. Idéalement, l'acheteur souhaite que la proportion p de composants défectueux d'un lot donné n'excède pas p_a et l'industriel veut que son lot soit vendu si la proportion de composants défectueux est inférieure à un seuil donné $p_i > 0$. On supposera que $p_i < p_a$. Le nombre de pièces à examiner est très important et le contrôle qualité coûteux. Il n'est pas question d'examiner toutes les pièces ce qui entraine forcément des risques d'erreur quant à l'évaluation du lot. Il convient alors de trouver une règle de décision en examinant le moins de pièces possibles. L'industriel exige alors que cette règle de décision ne décide $p \geq p_a$ lorsque $p \leq p_i$ qu'avec probabilité $\leq \alpha$ (cette source d'erreur correspond à déclarer que le lot ne conviendra pas à l'acheteur alors qu'il respecte la norme fixée par l'industriel). L'acheteur exige de son côté que la règle ne décide $p \leq p_i$ lorsque $p \geq p_a$ qu'avec probabilité $\leq \beta$ (cette source d'erreur correspond à déclarer un lot acceptable du point de vue de l'industriel alors qu'il ne l'est pas du point de vue de l'acheteur). Lorsque $p_i < p < p_a$, l'acheteur et l'industriel accepte la décision sans contrainte (on parle de zone d'indifférence). Le problème se ramène alors à tester $H_0 : p \leq p_i$ contre $H_1 : p \geq p_a$ avec une erreur de première espèce (resp. de deuxième espèce) contrôlée par α (resp. β). On admettra que la suite des valeurs 0 et 1 (0 pour non défectueux et 1 défectueux) obtenues lors de ce contrôle correspond à la réalisation de variables i.i.d toutes de loi de Bernoulli de paramètre $p \in (0, 1)$. L'idée est d'utiliser un test basé sur le rapport de vraisemblance

$$\frac{L_n(p_a)}{L_n(p_i)} = \frac{p_a^{\sum_{j=1}^n X_j}(1 - p_a)^{n-\sum_{j=1}^n X_j}}{p_i^{\sum_{j=1}^n X_j}(1 - p_i)^{n-\sum_{j=1}^n X_j}}.$$

On décide d'examiner un nombre ν aléatoire de pièces avec

$$\nu = \inf\left\{n \geq 1 : \frac{L_n(p_a)}{L_n(p_i)} \notin (\beta, \alpha^{-1})\right\}.$$

La régle de décision est alors H_0 (resp. H_1) lorsque $\frac{L_\nu(p_a)}{L_\nu(p_i)} \leq \beta$ (resp. $\geq \alpha^{-1}$). Ce problème se réécrit comme un problème de ruine du joueur en posant

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} Z_i, \quad Z_i = X_i \ln \frac{p_a}{p_i} + (1 - X_i) \ln\left(\frac{1 - p_a}{1 - p_i}\right),$$

puisque en passant au logarithme, on a

$$\nu = \inf\{n \geq 1 : S_n \notin (\ln(\beta), -\ln(\alpha))\}.$$

On pourra montrer à titre d'exercice que $\tau < +\infty$ p.s pour tout p (pour cela procéder comme pour la ruine du joueur en posant $S_0 = 0$ et utiliser le théorème d'arrêt avec la martingale $S_n - n\mathbb{E}_p(Z_1)$ si $\mathbb{E}_p(Z_1) \neq 0$ et $S_n^2 - n\mathrm{Var}_p(Z_1)$ si $\mathbb{E}_p(Z_1) = 0$). Vérifions ensuite que la règle de décision satisfait aux contraintes initiales. Nous admettrons que lorsque $p \leq p_i$ alors

$$\mathbb{P}_p\left(\frac{L_\nu(p_a)}{L_\nu(p_i)} \geq \alpha^{-1}\right) \leq \mathbb{P}_{p_i}\left(\frac{L_\nu(p_a)}{L_\nu(p_i)} \geq \alpha^{-1}\right).$$

Intuitivement, c'est clair puisque le rapport de vraisemblance est un produit de valeurs du type $\frac{p_a}{p_i} > 1$ (avec probabilité p) et $\frac{1-p_a}{1-p_i} < 1$ (avec probabilité $1-p$) : il est donc plus probable d'atteindre la borne supérieure de l'intervalle $(\ln(\beta), -\ln(\alpha))$ lorsque p augmente. De même, si $p \geq p_a$, alors

$$\mathbb{P}_p\left(\frac{L_\nu(p_a)}{L_\nu(p_i)} \leq \beta\right) \leq \mathbb{P}_{p_a}\left(\frac{L_\nu(p_a)}{L_\nu(p_i)} \leq \beta\right).$$

Montrons par exemple que

$$\mathbb{P}_{p_i}\left(\frac{L_\nu(p_a)}{L_\nu(p_i)} \geq \alpha^{-1}\right) \leq \alpha,$$

ce qui montrera que la contrainte fixée par l'industriel est respectée. On a

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}_{p_i}\left(\frac{L_\nu(p_a)}{L_\nu(p_i)} \geq \alpha^{-1}\right) \\
\leq \; & \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}_{p_i}\left(\frac{L_n(p_a)}{L_n(p_i)} \geq \alpha^{-1}, \nu = n\right) \\
= \; & \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}_{p_a}\left(\frac{L_n(p_i)}{L_n(p_a)} \mathbb{1}_{\left\{\frac{L_n(p_a)}{\mathbb{L}_n(p_i)} \geq \alpha^{-1}\right\}} \mathbb{1}_{\{\nu = n\}}\right) \\
\leq \; & \alpha.
\end{aligned}$$

Un argument similaire permet de montrer que $\mathbb{P}_{p_a}\left(\frac{L_n(p_a)}{L_n(p_i)} \leq \beta\right) \leq \beta$, donc la contrainte acheteur est également respectée.
Donnons maintenant une majoration du nombre moyen $\mathbb{E}_p(\nu)$ de pièces à contrôler pour décider de la qualité du lot. Nous ne considèrerons que le cas $m_p = \mathbb{E}_p(Z_1) \neq 0$ (on peut montrer que le cas $m_p = 0$ correspond à une valeur $p \in (p_i, p_a)$). La Théorème d'arrêt assure que pour tout entier n,

$\mathbb{E}_p\left(S_{n\wedge\nu}\right) = \mathbb{E}_p\left(n \wedge T\right) m_p$. Attention, ici S_ν ne prend pas forcément ses valeurs dans $\{\ln(\beta), -\ln(\alpha)\}$ mais on peut montrer que

$$\ln(\beta) + \ln\left(\frac{1-p_a}{1-p_i}\right) \leq S_{\nu\wedge n} \leq -\ln(\alpha) + \ln\left(\frac{p_a}{p_i}\right).$$

On en déduit alors la majoration

$$\mathbb{E}_p(\nu) \leq \frac{1}{m_p} \max\left\{\ln\left(\frac{p_a}{\alpha p_i}\right), \ln\left(\frac{1-p_i}{\beta(1-p_a)}\right)\right\}.$$

2.3 Convergence des (sous ; sur) martingales

Le cas des martingales bornées dans $\mathbb{L}^2$

Théorème 2 *Si $(X_n)_n$ est une martingale bornée dans $\mathbb{L}^2$ (i.e $\sup_n \mathbb{E}X_n^2 < +\infty$) alors $(X_n)_n$ converge dans $\mathbb{L}^2$ vers une variable aléatoire X_∞. De plus, on a $X_n = \mathbb{E}\left(X_\infty|\mathcal{F}_n\right)$ p.s.*

Preuve. La convergence dans $\mathbb{L}^2$ vers une variable aléatoire X_∞ a été prouvée en TD. Pour la dernière affirmation, on part de l'égalité $X_n = \mathbb{E}\left(X_m|\mathcal{F}_n\right)$ valable pour $m \geq n$. Par continuité de l'espérance conditionnelle dans $\mathbb{L}^2$ (tout projecteur orthogonal sur un s.e.v fermé d'un espace de Hilbert est continu), on obtient

$$X_n = \lim_{m\to\infty} \mathbb{E}\left(X_m|\mathcal{F}_n\right) = \mathbb{E}\left(X_\infty|\mathcal{F}_n\right),$$

où la limite considérée est au sens $\mathbb{L}^2$. Ceci prouve le théorème.□

2.3.1 Convergence presque sûre

La convergence presque sûre est plus délicate à montrer. Nous admettrons le théorème suivant.

Théorème 3 *Soit $(X_n)_n$ une (sous ; sur) martingale bornée dans $\mathbb{L}^1$ (i.e $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}|X_n| < +\infty$). Alors $(X_n)_n$ converge p.s vers une variable $X_\infty \in \mathbb{L}^1$.*

En revanche, rien n'assure de la convergence $\mathbb{L}^1$ de $(X_n)_n$. En particulier pour une martingale, $\mathbb{E}(X_\infty)$ peut être différente de $\mathbb{E}(X_n)$. Remarquons également que d'après les théorèmes 3 et 2, toute martingale bornée dans $\mathbb{L}^2$ converge p.s et dans $\mathbb{L}^2$.

Comme une sur-martingale positive est bornée dans $\mathbb{L}^1$, on en déduit le corollaire suivant.

Corollaire 2 *Toute sur-martingale positive converge p.s vers une variable aléatoire intégrable.*

2.3.2 Uniforme intégrabilité et convergence dans $\mathbb{L}^1$

La notion d'uniforme intégrabilité, que nous allons introduire, va permettre d'obtenir des résultats supplémentaires.

Définition 10 *On dit qu'une suite $(X_n)_n$ de v.a.r est uniformément intégrable si*

$$\lim_{M\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{|X_n|>M\}}|X_n|\right) = 0.$$

En particulier, une suite de v.a.r i.i.d et intégrables est uniformément intégrable. Il en est de même s'il existe une v.a.r intégrable Y telle que $\sup_{n\in\mathbb{N}} |X_n| \leq Y$ p.s. Une suite uniformément intégrable est bien sûr bornée dans $\mathbb{L}^1$.

Les deux exemples suivants sont fondamentaux.

Proposition 9
1. *Si pour un réel $\delta > 0$, $\sup_n \mathbb{E}\left(|X_n|^{1+\delta}\right) < +\infty$, alors la suite $(X_n)_n$ est uniformément intégrable.*
2. *Soient Y une v.a.r intégrable et $(X_n)_n$ la martingale régulière définie par $X_n = \mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$. Alors la suite $(X_n)_n$ est uniformément intégrable.*

Nous verrons plus loin une réciproque du point 2, à savoir qu'une martingale uniformément intégrable est régulière. Remarquons en particulier que toute (sous- ; sur-) martingale bornée dans $\mathbb{L}^2$ est uniformément intégrable, d'après le point 1.

Preuve

1. C'est une conséquence des inégalités

$$\mathbb{E}\left(|X_n|\mathbb{1}_{\{|X_n|>M\}}\right) \leq \frac{\mathbb{E}\left(|X_n|^{1+\delta}\mathbb{1}_{\{|X_n|>M\}}\right)}{M^\delta} \leq \frac{\sup_n \mathbb{E}\left(|X_n|^{1+\delta}\right)}{M^\delta}.$$

2. Remarquons d'abord que $|X_n| \leq Z_n = \mathbb{E}(|Y||\mathcal{F}_n)$ p.s et donc que

$$\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{|X_n|>M\}}|X_n|\right) \leq \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{Z_n>M\}}Z_n\right) = \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{Z_n>M\}}|Y|\right).$$

Il suffit donc de démontrer que

$$\lim_{M\to\infty} \sup_{n} \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{Z_n>M\}}|Y|\right) = 0.$$

Soit $\epsilon > 0$. Pour des réels $M, N > 0$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{Z_n>M\}}|Y|\right) &= \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{Z_n>M,|Y|\leq N\}}|Y|\right) + \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{Z_n>M,|Y|>N\}}|Y|\right) \\
&\leq N\mathbb{P}(Z_n > M) + \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{|Y|>N\}}|Y|\right) \\
&\leq \frac{N\mathbb{E}|Y|}{M} + \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{|Y|>N\}}|Y|\right).
\end{aligned}$$

La dernière inégalité utilise l'inégalité de Markov et le fait que l'espérance de l'espérance conditionnelle est égale à l'espérance. Fixons N tel que $\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{|Y|>N\}}|Y|\right) \leq \frac{\epsilon}{2}$ (c'est possible par intégrabilité de Y). Ainsi, si $M \geq \frac{2N\mathbb{E}|Y|}{\epsilon}$, on obtient

$$\sup_n \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{Z_n>M\}}|Y|\right) \leq \epsilon.$$

Comme ϵ est arbitraire, on obtient bien le résultat.□

Le lien fondamental entre uniforme intégrabilité et convergence $\mathbb{L}^1$ est le suivant.

Proposition 10 *Soit une suite $(X_n)_n$ de v.a.r intégrables qui converge p.s vers une v.a.r X. Alors la suite $(X_n)_n$ converge dans $\mathbb{L}^1$ vers X si et seulement si elle est uniformément intégrable.*

Par conséquent, les martingales régulières convergent aussi dans $\mathbb{L}^1$ (en plus de la convergence p.s).

Preuve

1. Montrons d'abord que si $(X_n)_n$ converge p.s et dans $\mathbb{L}^1$ vers une v.a.r X alors elle est uniformément intégrable. Soit $M > 1$. On part de l'inégalité

$$\mathbb{E}\left(|X_n|\mathbb{1}_{|X_n|>M}\right) \leq \mathbb{E}\left(|X_n - X|\right) + \mathbb{E}\left(|X|\mathbb{1}_{|X_n|>M}\right).$$

Ensuite, on utilise la majoration

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(|X|\mathbb{1}_{|X_n|>M}\right) &\leq \mathbb{E}\left(|X|\mathbb{1}_{|X_n|>M,|X_n-X|\leq 1}\right)\mathbb{E}\left(|X|\mathbb{1}_{|X_n|>M,|X_n-X|>1}\right) \\ &\leq \mathbb{E}\left(|X|\mathbb{1}_{|X_n-X|>1}\right) + \mathbb{E}\left(|X|\mathbb{1}_{|X|>M-1}\right) \end{aligned}$$

Fixons $\epsilon > 0$ et soit n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$,

$$\mathbb{E}\left(|X_n - X|\right) + \mathbb{E}\left(|X|\mathbb{1}_{|X_n-X|>1}\right) < \epsilon.$$

Un tel choix de n_0 est possible en utilisant la convergence dans $\mathbb{L}^1$ de la suite $(X_n)_n$ et la convergence dominée pour le second terme $\mathbb{E}\left(|X|\mathbb{1}_{|X_n-X|>1}\right)$. On se donne ensuite $M_0 > 0$ tel que pour tout $M > M_0$,

$$\max_{1\leq n\leq n_0} \mathbb{E}\left(|X_n|\mathbb{1}_{|X_n|>M}\right) < \epsilon, \quad \mathbb{E}\left(|X|\mathbb{1}_{|X|>M-1}\right) < \epsilon.$$

Un tel choix de M_0 est possible pour une famille finie de v.a.r intégrables. On a donc $\sup_n \mathbb{E}\left(|X_n|\mathbb{1}_{|X_n|>M}\right) < 2\epsilon$ pour tout $M > M_0$. Ceci suffit à prouver l'uniforme intégrabilité.

2. Montrons la réciproque, en supposant la suite $(X_n)_n$ uniformément intégrable. L'intégrabilité de X est une conséquence du lemme de Fatou :

$$\mathbb{E}|X| \leq \liminf_n \mathbb{E}|X_n| \leq \sup_n \mathbb{E}|X_n| < +\infty.$$

Pour montrer la convergence $\mathbb{L}^1$, on part de l'égalité

$$\mathbb{E}|X_n - X| = \mathbb{E}\left(|X_n - X|\mathbb{1}_{\{|X_n - X|\leq 1\}}\right) + \mathbb{E}\left(|X_n - X|\mathbb{1}_{\{|X_n - X|>1\}}\right).$$

Le premier terme du membre de droite converge vers 0 par convergence dominée. Pour le deuxième terme, on a

$$\mathbb{E}\left(|X_n - X|\mathbb{1}_{\{|X_n - X|>1\}}\right) \leq \mathbb{E}\left(|X_n|\mathbb{1}_{\{|X_n - X|>1\}}\right) + \mathbb{E}\left(|X|\mathbb{1}_{\{|X_n - X|>1\}}\right).$$

Par convergence dominée, le deuxième terme du membre de droite converge vers 0. Il reste donc à prouver que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(|X_n|\mathbb{1}_{\{|X_n - X|>1\}}\right) = 0$. Pour cela, fixons $\epsilon > 0$. On a

$$\mathbb{E}\left(|X_n|\mathbb{1}_{\{|X_n - X|>1\}}\right) \leq \mathbb{E}\left(|X_n|\mathbb{1}_{\{|X_n|>M\}}\right) + M\mathbb{P}\left(|X_n - X| > 1\right).$$

Par uniforme intégrabilité, on peut fixer $M > 0$ tel que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left(|X_n|\mathbb{1}_{\{|X_n|>M\}}\right) < \epsilon.$$

On utilise ensuite la convergence p.s de $(X_n)_n$ qui guarantit l'existence d'un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$,

$$M\mathbb{P}\left(|X_n - X| > 1\right) < \epsilon.$$

On en déduit que pour $n \geq n_0$, $\mathbb{E}\left(|X_n|\mathbb{1}_{\{|X_n - X|>1\}}\right) < 2\epsilon$. Ceci suffit à prouver que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(|X_n|\mathbb{1}_{\{|X_n - X|>1\}}\right) = 0$. La preuve est complète.□

Théorème 4 *Soit $(X_n)_n$ une martingale (resp. sous-martingale, sur-martingale) bornée dans $\mathbb{L}^1$, de limite presque sûre X_∞. Alors la suite $(X_n)_n$ converge dans $\mathbb{L}^1$ vers X_∞ ssi elle est uniformément intégrable. De plus, si $(X_n)_n$ est uniformément intégrable, on a*

$$X_n = (\text{ resp. } \leq, \geq)\mathbb{E}\left(X_\infty|\mathcal{F}_n\right) \text{ p.s pour tout } n.$$

Remarque. Si $X_n = \mathbb{E}\left(Y|\mathcal{F}_n\right)$, avec Y intégrable mais pas forcément $\mathcal{F}_\infty-$mesurable, alors on peut montrer que $X_\infty = \mathbb{E}\left(Y|\mathcal{F}_\infty\right)$ p.s.

Preuve. Nous prouvons uniquement le résultat pour les martingales, le cas des (sous-, sur-) martingales est analogue. L'équivalence annoncée résulte de la proposition précédente. Justifions la représentation sous la forme d'une martingale régulière. Si $A \in \mathcal{F}_n$, on a

$$\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_A X_\infty\right) = \lim_{m\to\infty} \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_A X_m\right) = \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_A X_n\right),$$

où l'interversion entre la limite et l'espérance se justifie grâce à la convergence $\mathbb{L}^1$. La caractérisation de l'espérance conditionnelle permet de conclure.□

Voyons maintenant une extension du théorème d'arrêt aux temps d'arrêt non bornés. Pour une martingale (resp. sous-martingale, sur-martingale) uniformément intégrable $(X_n)_n$ et un temps d'arrêt T, on définit $X_T = X_\infty$ sur $\{T = +\infty\}$. La preuve du théorème suivant est analogue à celle du premier théorème d'arrêt.

Théorème 5 *(**Deuxième théorème d'arrêt**) Soient $(X_n)_n$ une martingale (resp. sous-martingale, sur-martingale) uniformément intégrable et (S,T) et couple de temps d'arrêt tel que $S \le T$. Alors $X_T \in \mathbb{L}^1$ et*

$$\mathbb{E}(X_T|\mathcal{F}_S) = X_S(\text{ resp. } \ge X_S, \le X_S).$$

En particulier, dans le cas martingale, on a $\mathbb{E}(X_T) = \mathbb{E}(X_0)$ et $X_T = \mathbb{E}(X_\infty|\mathcal{F}_T)$ p.s.

2.3.3 Décomposition de Doob

Définition 11
1. *Un processus $(A_n)_n$ est dit prévisible si A_0 est $\mathcal{F}_0-$mesurable et si A_n est $\mathcal{F}_{n-1}-$mesurable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.*
2. *On dit qu'un processus $(A_n)_n$ est croissant si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n \le A_{n+1}$ p.s. Dans ce cas, on notera A_∞ la limite p.s de la suite $(A_n)_n$ (A_∞ peut prendre la valeur $+\infty$).*

Remarque. Soient $(X_n)_n$ une martingale de carré intégrable et $(A_n)_n$ un processus prévisible et de carré intégrable. On peut alors construire une autre martingale $((A * M)_n)_n$ défini par

$$(A * X)_n = A_0 X_0 + \sum_{j=1}^{n} A_j \left(X_j - X_{j-1}\right). \tag{2.3}$$

On parle d'intégrale stochastique à temps discret. Ce type de martingale est utilisé pour la construction de l'intégrale stochastique (notion non abordée dans ce cours).

On rencontre aussi ce type de martingales dans le domaine des séries temporelles. Par exemple, soit $(Y_n)_n$ le processus autorégressif défini par

$$Y_n = f(\theta, Y_{t-1}) + Z_n, \quad Y_0 = y,$$

où f est une fonction C^1, et $(Z_n)_n$ vérifie $\mathbb{E}(Z_n|\mathcal{F}_{n-1}) = 0$ p.s (on considère la filtration naturelle $(\mathcal{F}_n)_n$ du processus $(Z_n)_n$). Alors l'estimation du paramètre $\theta \in \Theta$ à partir d'un échantillon peut être faite par moindres carrés en minimisant

$$\theta \mapsto L_n(\theta) = \sum_{j=1}^{n} \left(Y_j - f\left(\theta, Y_{j-1}\right)\right)^2.$$

Si θ_0 est la valeur du paramètre associé à l' échantillon alors chaque coordonnée du processus des gradients $(\nabla_\theta L_n(\theta_0))_n$ est une martingale du type précédent.

Proposition 11 *Tout processus adapté $(X_n)_n$ et intégrable se décompose de façon unique sous la forme $X_n = M_n + A_n$ où (M_n) est une martingale et $(A_n)_n$ est un processus prévisible tel que $A_0 = 0$. Le processus $(A_n)_n$ est croissant (resp. décroissant) ssi $(X_n)_n$ est une sous-martingale (resp. sur-martingale).*

Preuve. Pour prouver l'existence d'une telle décomposition, il suffit de poser $M_0 = X_0$, $A_0 = 0$ et si $n \geq 1$,

$$M_n = X_0 + \sum_{j=1}^{n} \left(X_j - \mathbb{E}\left(X_j|\mathcal{F}_{j-1}\right)\right), \quad A_n = \sum_{j=1}^{n} \left(\mathbb{E}\left(X_j|\mathcal{F}_{j-1}\right) - X_{j-1}\right).$$

On voit alors que le processus $(A_n)_n$ est croissant (resp. décroissant) ssi $(X_n)_n$ est une sous-martingale (resp. sur-martingale).
Prouvons l'unicité. Si (M', A') est une autre décomposition, on a, en utilisant la propriété de martingale et le caractère prévisible de A et A',

$$\mathbb{E}\left(X_j - X_{j-1}|\mathcal{F}_{j-1}\right) = A_j - A_{j-1} = A'_j - A'_{j-1}, \quad j \in \mathbb{N}^*.$$

On en déduit $A = A'$ puis $M = M'$ p.s.□

Définition 12 *Soit $(X_n)_n$ une martingale de carré intégrable. Le processus croissant prévisible de la décomposition de Doob pour la sous-martingale $\left(X_n^2\right)_n$ est noté $(< X >_n)_n$ et est appelé crochet de la martingale $(X_n)_n$. C'est donc l'unique processus croissant prévisible et nul en 0 tel que $\left(X_n^2 - < X >_n\right)_n$ soit une martingale.*

On a donc l'expression

$$< X >_n = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}\left((X_j - X_{j-1})^2|\mathcal{F}_{j-1}\right), \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Lorsque la martingale est bornée dans $\mathbb{L}^2$, on peut montrer facilement que $\mathbb{E}\left(< X >_\infty\right) < +\infty$ ce qui entraine que $< X >_\infty$ est fini p.s (utiliser la martingale $\left(X_n^2 - < X >_n\right)_n$).
Mentionnons maintenant un résultat de type loi des grands nombres.

Théorème 6 *Soit $(X_n)_n$ une martingale de carré intégrable. Sur l'évènement $\{< X >_\infty = +\infty\}$, la suite de terme général $\frac{X_n}{<X>_n}$ converge p.s vers 0.*

Exemple. Soit $(\xi_j)_j$ une suite de v.a.r indépendantes centrées. On suppose que $\sigma_j^2 = \mathbb{E}\left(\xi_j^2\right) < +\infty$. Considérons la martingale S_n définie par $S_0 = 0$ et $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$ pour tout $n \geq 1$. Il est facile de vérifier que $< S >_n = \sigma_1^2 + \cdots + \sigma_n^2$. Lorsque $\sum_{j\geq 1} \sigma_j^2 = +\infty$, on a $< S >_\infty = +\infty$ et le théorème précédent assure que $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sum_{j=1}^n \sigma_j^2} = 0$ p.s. Lorsque les variables ξ_j sont identiquement distribuées, on retrouve la loi forte des grands nombres pour les v.a.r i.i.d (dans le cas $\mathbb{L}^2$).

L'exemple du nombre de records. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des v.a.r i.i.d dont la loi commune possède une densité. Si $1 \leq i \leq n$, on définit

$$R_i = 1 + \sum_{k=1}^{i} \mathbb{1}_{X_k > X_i}.$$

$R_i(\omega)$ représente le rang de $X_i(\omega)$ dans $\{X_1(\omega),\ldots,X_i(\omega)\}$. Alors on peut montrer que les v.a R_i sont indépendantes et que R_i suit une loi uniforme sur $\{1,2,\ldots,i\}$. Alors si $S_n = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{R_i=1}$ (nombre de records observés), la loi des grands nombres pour les martingales permet de montrer que $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{\ln(n)} = 1$ p.s. Autrement dit, lorsque n est grand, le nombre de records se comporte comme le logarithme de n.

Preuve du théorème 6. Il suffit en fait de prouver que $\frac{X_n}{1+<X>_n}$ converge vers 0 p.s. On va à cet effet étudier la convergence du processus $(Y_n)_n$ défini par $Y_0 = X_0$ et

$$Y_n = X_0 + \sum_{j=1}^{n} \frac{X_j - X_{j-1}}{1+ < X >_j}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Alors $(Y_n)_n$ est une martingale du type (2.3). On en déduit facilement que

$$\mathbb{E}\left(Y_n^2\right) = \mathbb{E}\left(Y_0^2\right) + \mathbb{E}\left(\frac{X_j - X_{j-1}}{1+ < X >_j}\right)^2.$$

Comme $\frac{1}{\left(1+<X>_j\right)^2}$ est $\mathcal{F}_{j-1}$−mesurable, on a

$$\mathbb{E}\left(\frac{X_j - X_{j-1}}{1+ < X >_j}\right)^2 = \mathbb{E}\left(\frac{\mathbb{E}\left(|X_j - X_{j-1}|^2|\mathcal{F}_{j-1}\right)}{\left(1+ < X >_j\right)^2}\right) = \mathbb{E}\left(\frac{< X >_j - < X >_{j-1}}{\left(1+ < X >_j\right)^2}\right),$$

où la dernière égalité est établie en utilisant la propriété de martingale pour $\left(X_n^2 - < X >_n\right)_n$. Par croissance du processus $(< X >_n)_n$, il vient ensuite

$$\mathbb{E}\left(\frac{< X_j > - < X_{j-1} >}{\left(1+ < X >_j\right)^2}\right) = \mathbb{E}\left(\frac{\int_{<X>_{j-1}}^{<X>_j} 1dx}{\left(1+ < X >_j\right)^2}\right) \leq \mathbb{E}\left(\int_{<X>_{j-1}}^{<X>_j} \frac{1}{(1+x)^2}dx\right).$$

On obtient en définitive

$$\mathbb{E}\left(Y_n^2\right) \leq \mathbb{E}\left(Y_0^2\right) + \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx.$$

La martingale $(Y_n)_n$ est bornée dans $\mathbb{L}^2$ et elle converge p.s (et aussi dans $\mathbb{L}^2$). Le lemme de Kronecker, énoncé ci-dessous sans démonstration, peut être appliqué avec $b_n = 1+ < X >_n (\omega)$ et $a_j = \frac{X_j(\omega)-X_{j-1}(\omega)}{1+<X>_j(\omega)}$ pour tout ω tel que $(Y_n(\omega))_n$ converge et tel que $< X >_\infty (\omega) = +\infty$. Ceci permet de conclure la preuve. □

Lemme 1 *(***Kronecker***)*

Soient une série convergente de terme général a_n et une suite croissante $(b_n)_n$ de réels tendant vers l'infini avec n. Alors

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} \sum_{j=1}^{n} b_j a_j = 0.$$

Terminons par un résultat de convergence en loi : le théorème de la limite centrale pour des tableaux triangulaires de différences de martingale. On appelle différence de martingale toute suite $(\xi_i)_{1\leq i\leq k}$ de variables aléatoires intégrables, adaptées à une filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_i)_{i\geq 1}$ et telle que $\mathbb{E}(\xi_i|\mathcal{F}_{i-1}) = 0$ pour $1 \leq i \leq k$ (on convient que $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$). La suite $(M_i)_{1\leq i\geq k}$ définie par $M_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{i} \xi_j$ est alors une martingale (on peut se ramener à une martingale indexée par $\mathbb{N}$ en posant $\xi_i = 0$ et $M_i = M_k$ pour $i \geq k$). Un tableau triangulaire de différences de martingales est composée de variables aléatoires $\xi_{n,i}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $1 \leq i \leq k_n$ et telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(\xi_{n,i})_{1\leq i\leq k_n}$ soit une différence de martingale relativement à une filtration $\mathcal{F}^{(n)}$. On suppose aussi que $k_n \nearrow +\infty$.

Théorème 7 *On suppose que le tableau triangulaire de différences de martingales vérifie*

1. **Convergence du crochet.** $\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{k_n} \mathbb{E}\left[\xi_{n,i}^2|\mathcal{F}_{i-1}^{(n)}\right] = \sigma^2$ *en probabilité.*
2. **Condition de Lindeberg.** *Pour tout* $\epsilon > 0$*, on a*

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{k_n} \mathbb{E}\left[\xi_{n,i}^2 \mathbb{1}_{|\xi_{n,i}|>\epsilon}\right] = 0.$$

Alors la somme $\sum_{i=1}^{k_n} \xi_{n,i}$ *converge en loi lorsque* $n \to +\infty$ *vers la loi* $\mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)$.

Remarque. La condition de Lindeberg est satisfaite lorsque $\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{k_n} \mathbb{E}\left[|\xi_{n,i}|^{2+\delta}\right] = 0$ pour un $\delta > 0$. Ceci est dû au fait que

$$\mathbb{E}\left[\xi_{n,i}^2 \mathbb{1}_{|\xi_{n,i}|>\epsilon}\right] \leq \frac{1}{\epsilon^\delta} \mathbb{E}\left[|\xi_{n,i}|^{2+\delta}\right].$$

Exemples d'utilisation

1. Reprenons le problème des records. On a la décomposition

$$\sqrt{\ln(n)}\left(\frac{S_n}{\ln(n)} - 1\right) = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left[\mathbb{1}_{R_i=1} - \frac{1}{i}\right]}{\sqrt{\ln(n)}} + \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \ln(n)}{\sqrt{\ln(n)}}.$$

Le deuxième terme (déterministe) converge vers 0 et il suffit d'étudier la convergence en loi du premier terme. Pour cela on pose $\xi_{n,i} = \frac{\mathbb{1}_{R_i=1-\frac{1}{i}}}{\sqrt{\ln(n)}}$ pour $n \geq 1$ et $1 \leq i \leq n$ et la filtration considérée est la filtration naturelle associée aux R_i pour tout n. Comme les $\xi_{n,i}$ sont indépendantes et centrées, on se retrouve bien avec un tableau triangulaire de différences de martingales. On a alors

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[\xi_{n,i}^2\right] = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}\left(1 - \frac{1}{i}\right)}{\ln(n)} \to 1.$$

La condition de Lindeberg est aussi vérifiée en utilisant la remarque précédente pour $\delta = 2$ par exemple. On a plus précisément

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[\xi_{n,i}^4\right] = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left\{\left(1-\frac{1}{i}\right)^4 \frac{1}{i} + \frac{1}{i^4}\left(1-\frac{1}{i}\right)\right\}}{\ln(n)^2}$$

qui converge bien vers 0. On en déduit la limite en loi $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{\ln(n)}\left(\frac{S_n}{\ln(n)} - 1\right) = \mathcal{N}(0,1)$.

2. Considérons le processus AR(p)

$$X_t = \sum_{j=1}^{p} a_j X_{t-j} + \varepsilon_t,$$

où $(\varepsilon_t)_t$ est une suite de v.a.r i.i.d et de carré intégrable et le polynôme $\mathcal{P}(z) = 1 - \sum_{j=1}^{p} a_j z^j$ n'a pas de racine à l'intérieur du dique unité. On rappelle du cours de séries temporelles que dans ce cas, $(X_t)_t$ définit un processus strictement stationnaire et de carré intégrable. De plus, la loi des grands nombres reste valide pour des sommes partielles du type $\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} f(X_t, X_{t-1}, \ldots)$ sous réserve d'intégrabilité. Posons

$$\Phi_t = \left(X_{t-1}, \ldots X_{t-p}\right)' \text{ et } \hat{a} = \left(\sum_{t=1}^{T} \Phi_t \Phi_t'\right)^{-1} \sum_{t=1}^{T} \Phi_t X_t.$$

Alors $\hat{a}$ est l'estimateur des moindres carrés conditionnels :

$$\hat{a} = \arg\min_{\lambda\in\mathbb{R}^p} \sum_{t=1}^{T} \left[X_t - \Phi_t'\lambda\right]^2.$$

Remarquons alors que

$$\sqrt{T}\left(\hat{a} - a\right) = \left(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \Phi_t \Phi_t'\right)^{-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^{T} \Phi_t \varepsilon_t.$$

Posons alors $\Gamma = \mathbb{E}\left(\Phi_t \Phi_t'\right)$. La loi des grands nombres assure que

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \Phi_t \Phi_t' = \Gamma \text{ p.s.}$$

Evaluons la limite en loi de $\frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^{T} \Phi_t \varepsilon_t$. Soit $x \in \mathbb{R}^p$. Alors en posant $\xi_{T,t} = \xi_t = \frac{1}{\sqrt{T}} x' \Phi_t \varepsilon_t$ et $\mathcal{F}_t^{(T)} = \mathcal{F}_t = \sigma\left(X_j : j \leq t\right)$, on a bien une différence de martingale car ε_t est indépendante de $\mathcal{F}_{t-1}$ et

$$\sum_{t=1}^{T} \mathbb{E}\left(\xi_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}\right) = x' \frac{\sigma^2}{T} \sum_{t=1}^{T} \Phi_t \Phi_t' x \to \sigma^2 x' \Gamma x.$$

De plus
$$\sum_{t=1}^{T}\mathbb{E}\left[\xi_t^2\mathbb{1}_{|\xi_t|>\epsilon}\right]=\mathbb{E}\left[(x'\Phi_1)^2\,\varepsilon_1^2\mathbb{1}_{|x'\Phi_1\varepsilon_1|>T\epsilon}\right].$$
Comme $\mathbb{E}\left[(x'\Phi_1)^2\,\varepsilon_1^2\right]=\sigma^2x'\Gamma x<+\infty$, il est immédiat que pour tout $\epsilon>0$,
$$\lim_{T\to+\infty}\mathbb{E}\left[(x'\Phi_1)^2\,\varepsilon_1^2\mathbb{1}_{|x'\Phi_1\varepsilon_1|>T\epsilon}\right]=0.$$
Le théorème précédent assure alors que $\frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^{T}x'\Phi_t\varepsilon_t$ converge en loi vers une $\mathcal{N}\left(0,\sigma^2x'\Gamma x\right)$. Rappelons qu'une suite de vecteurs aléatoires $(U_n)_n$ de $\mathbb{R}^p$ converge en loi vers un vecteur aléatoire U si et seulement si $x'U_n$ converge en loi vers $x'U$ pour tout $x\in\mathbb{R}^p$ (d'après la caractérisation de la convergence en loi à l'aide des fonctions caractéristiques). On en déduit que $\frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^{T}\Phi_t\varepsilon_t$ converge en loi vers une $\mathcal{N}_p\left(0,\sigma^2\Gamma\right)$. Le lemme de Slutsky assure alors que $\sqrt{T}\,(\hat{a}-a)$ converge en loi vers une $\mathcal{N}_p\left(0,\sigma^2\Gamma^{-1}\right)$.

2.4 Exercices

Exercice 8 [Ruine du joueur]

On reprend le problème de la ruine du joueur. Un joueur, dont la fortune initiale est a euros, joue à pile ou face. Il reçoit un euro de la banque s'il obtient pile et en donne un à la banque s'il obtient face. La banque dispose initialement de b euros. Le jeu continue jusqu'à la ruine du joueur ou de la banque. On suppose que les parties sont indépendantes entre elles et que la probabilité d'obtenir un pile est $p>\frac{1}{2}$. Au bout de n parties, la fortune S_n du joueur A est
$$S_n=a+\sum_{i=1}^{n}Y_i,$$
où $(Y_i)_i$ est une suite de v.a i.i.d telle que $\mathbb{P}(Y_1=1)=1-\mathbb{P}(Y_1=-1)=p$. Le temps d'arrêt T du jeu est défini par
$$T=\inf\{n\in\mathbb{N}^*:S_n\in\{0,a+b\}\}.$$
Enfin, on pose $q=1-p$, $\rho=\mathbb{P}(S_T=a+b)$.

1. En utilisant la loi des grands nombres, montrer que T est fini p.s.
2. A l'aide de la martingale $(S_n-n(p-q))_n$, déterminer une relation entre ρ et $\mathbb{E}(T)$.
3. Déterminer $s>0$ pour que le processus $(U_n)_n$ défini par $U_n=s^{S_n}$, $n\in\mathbb{N}$, soit une martingale.
4. En déduire une expression de ρ et de $\mathbb{E}(T)$.

Exercice 9 [Théorème d'arrêt et calcul de loi]

Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a i.i.d et à valeurs dans $\mathbb{N}\cup\{-1\}$. On suppose que X_1 est non constante, intégrable et $\mathbb{E}(X_1)\leq 0$. On pose $S_n=X_1+\cdots+X_n$ si $n\in\mathbb{N}^*$ et $S_0=0$. Soit
$$T=\inf\{n:S_n=-1\}.$$

Enfin pour $\beta \geq 0$, on définit $g(\beta) = \ln\left(\mathbb{E}\left(\exp(-\beta X)\right)\right)$. On admettra que g est convexe et strictement croissante et on notera f sa réciproque.

1. En utilisant la martingale $(M_n)_n$ définie par $M_n = \exp\left(-\beta S_n - ng(\beta)\right)$, montrer que

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(\beta - Tg(\beta)\right) \mathbb{1}_{T<+\infty}\right) = 1.$$

2. En déduire que $\mathbb{P}(T < +\infty) < 1$ ainsi qu'une expression de la transformée de Laplace L de T, définie par

$$L(\alpha) = \mathbb{E}\left(\exp(-\alpha T)\right), \quad \alpha > 0.$$

Exercice 10 [Galton-Watson]

Le processus de Galton-Watson est utilisé pour modéliser l'évolution d'une population à travers le temps (arbres généalogiques, files d'attente, division cellulaire,...). Ce processus est défini comme suit. On part d'un ancêtre commun et on pose $Z_0 = 1$. Ensuite si Z_n désigne la taille de la population à la génération $n \in \mathbb{N}$, alors

$$Z_{n+1} = \mathbb{1}_{Z_n>0} \sum_{i=1}^{Z_n} Y_{n+1,i},$$

où les $Y_{n+1,i}$ sont des v.a i.i.d toutes à valeurs entières positives. On supposera que les suites $(Y_{n,i})_i$, $n = 1, 2, \ldots$, sont indépendantes entre elles. On pose $m = \mathbb{E}Y_{1,1}$.

1. Montrer que le processus $\left(\frac{Z_n}{m^n}\right)_n$ est une martingale qui converge p.s.
2. Lorsque $m < 1$, montrer que pour presque tout ω, $Z_n(\omega) = 0$ à partir d'un certain rang (on dit qu'il y a extinction). En déduire que la martingale de la question précédente n'est pas uniformément intégrable.

Exercice 11 On considère une suite de v.a.r i.i.d $(X_n)_n$ toutes de loi $\mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)$. On définit le processus $(M_n)_n$ par $M_0 = 1$ et

$$M_n = \exp\left(X_1 + \cdots + X_n - \frac{1}{2}n\sigma^2\right), \quad n \geq 1.$$

1. Montrer que $(M_n)_n$ est une martingale qui converge p.s vers M_∞. Est-elle bornée dans $\mathbb{L}^2$?
2. Calculer directement M_∞ et en déduire que $(M_n)_n$ ne converge pas dans $\mathbb{L}^1$.

Exercice 12 Soient $(X_k)_{k\geq1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes telles que pour chaque $k \geq 1$, $\mathbb{E}(X_k) = 0$ et $\mathbb{E}(X_k^2) = 1$. On note $(Q_n)_n$ le processus stochastique à temps discret tel que $Q_0 = 0$ et pour tout $n \geq 1$:

$$Q_n = \sum_{1\leq i<j\leq n} \frac{X_i}{i}\frac{X_j}{j}.$$

1. Montrer que $(Q_n)_n$ est une martingale.
2. Calculer le crochet $< Q >$ de la martingale $(Q_n)_n$.

3. Calculer $\mathbb{E}(Q_n^2)$ pour tout n, puis étudier la convergence de la suite $(Q_n)_n$.

Exercice 13 Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, telle que $X_k \geq 0$ p.s. et $\mathbb{E}X_k = 1$ pour chaque $k \geq 1$. On note $(N_n)_{n\geq 0}$ le processus stochastique défini par $N_0 = 1$ et pour chaque $n \geq 1$:

$$N_n = \prod_{k=1}^{n} X_k = X_1 X_2 \cdots X_n.$$

Enfin, $a_k = \mathbb{E}\sqrt{X_k}$ pour chaque $k \geq 1$ et $\ell = \prod_{k\geq 1} a_k$.

1. Montrer que $a_k \in]0, 1]$ pour chaque $k \geq 1$.
2. Montrer que $(N_n)_{n\geq 0}$ est une martingale qui converge p.s. On note N_∞ sa limite.
3. On suppose dans cette question que $\ell = 0$.
   (a) Montrer que $N_\infty = 0$ p.s.
   (b) En déduire que $(N_n)_n$ ne converge pas dans L^1.
4. On suppose dans cette question que $\ell > 0$. On note $(Q_n)_{n\geq 1}$ le processus stochastique défini pour chaque $n \geq 1$ par

$$Q_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{X_k}}{a_k}.$$

   (a) Montrer que $(Q_n)_{n\geq 1}$ est une martingale qui converge dans L^2.
   (b) En déduire que $(N_n)_{n\geq 0}$ converge dans L^1, puis que N_∞ n'est pas la variable aléatoire nulle.

Exercice 14 [Théorème de Radon-Nikodym]
Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(\mathcal{F}_n)_n$ une filtration.

1. Soit $\mathbb{Q}$ est une deuxième mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$. On suppose qu'il existe un processus adapté $(X_n)_n$ à valeurs positives tel que

$$\mathbb{Q}(B) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\mathbb{1}_B X_n) = \int_B X_n d\mathbb{P}, \quad B \in \mathcal{F}_n.$$

   Montrer que $(X_n)_n$ est une martingale pour $\mathbb{P}$ qui converge p.s.
2. On dit que la tribu $\mathcal{A}$ est séparable si $\mathcal{A} = \sigma(A_1, A_2, \ldots)$ pour une suite d'évènements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (c'est le cas des tribus boréliennes sur $\mathbb{R}^k$, $k \geq 1$). Si $\mathcal{A}$ est séparable, on suppose donnée une probabilité $\mathbb{Q}$ sur $(\Omega, \mathcal{A})$ telle que

$$\forall A \in \mathcal{A}, \quad \mathbb{P}(A) = 0 \Rightarrow \mathbb{Q}(A) = 0.$$

   L'objectif des questions suivantes est de démontrer que $\mathbb{Q}$ admet une densité par rapport $\mathbb{P}$, c'est à dire que $\mathbb{Q} = X \cdot \mathbb{P}$ pour une certaine v.a X positive d'espérance 1 sous $\mathbb{P}$. On pose ici $\mathcal{F}_n = \sigma(A_0, \ldots, A_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, justifier l'existence d'une partition finie $\left\{B_1^n, \dots, B_{p_n}^n\right\}$ de Ω telle que

$$\mathcal{F}_n = \sigma\left(B_1^n, \dots, B_{p_n}^n\right).$$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$X_n = \sum_{i=1}^{p_n} \frac{\mathbb{Q}\left(B_i^n\right)}{\mathbb{P}\left(B_i^n\right)} \mathbb{1}_{B_i^n},$$

avec la convention $\frac{0}{0} = 0$. Montrer que

$$\mathbb{Q}(B) = \int_B X_n d\mathbb{P}, \quad B \in \mathcal{F}_n.$$

(c) Montrer que la martingale $(X_n)_n$ est uniformément intégrable.

(d) Conclure.

Exercice 15 [Wright-Fisher]

En génétique, le modèle de Wright-Fisher est utilisé pour étudier l'évolution de la proportion de deux allèles A et B dans une population haploïde (i.e chaque individu possède un seul exemplaire de chaque double-brin d'ADN) et dont la taille reste à peu près constante d'une génération sur l'autre. Plus précisément, si N désigne la taille de cette population et X_n le nombre d'individus possédant l'allèle A à la génération $n \in \mathbb{N}$, on estime que la loi conditionnelle $X_{n+1}|X_n, X_{n-1}, \dots, X_0$ est une loi binomiale de paramètres N et $\frac{X_n}{N}$. Schématiquement, cela revient à considérer que tout individu i de la génération $n+1$ provient, indépendamment des autres, du parent j de la génération n avec probabilité $\frac{1}{N}$ et hérite de l'allèle correspondant. On suppose que X_0 est fixé à $x_0 \in \{1, \dots, N-1\}$. Le processus $(X_n)_n$ est alors à valeurs dans $\{0, 1, \dots, N\}$. L'objectif de cet exercice est de montrer que le temps

$$\tau = \inf\{n \in \mathbb{N} : X_n \in \{0, N\}\},$$

est fini p.s et que $\mathbb{P}(X_\tau = 0) = 1 - \frac{x_0}{N}$.

1. Montrer que $(X_n)_n$ est une martingale qui converge p.s et dans $\mathbb{L}^2$ vers une variable aléatoire X_∞.
2. Montrer que le processus $(M_n)_n$ défini par $M_n = \left(\frac{N}{N-1}\right)^n X_n(N - X_n)$ est une martingale et en déduire la valeur de $\mathbb{E}(X_\infty(N - X_\infty))$.
3. Conclure que τ est fini p.s et calculer $\mathbb{P}(X_\tau = 0)$.

Exercice 16 [Le problème de Dirichlet]

Pour un solide homogène dont la température sur la surface extérieure est fixée (pas forcément la même en tous les points de la surface), la température à l'intérieur va converger vers un équilibre thermique. Notons $D \in \mathbb{R}^3$ ce solide qui est supposé ouvert connexe et borné et ∂D sa frontière. Mathématiquement, on peut montrer que si $b : \partial D \to \mathbb{R}$ est une fonction continue (température au bord) alors la température $\phi : D \to \mathbb{R}$ peut être considérée comme une fonction de classe C^∞ sur D, continue sur $D \cup \partial D$ et solution de l'équation aux dérivées partielles (problème de Dirichlet)

$$\begin{cases} \Delta\phi(x) = 0 \text{ pour tout } x \in D \\ \phi(x) = b(x) \text{ pour tout } x \in \partial D \end{cases}$$

où Δ désigne l'opérateur laplacien défini par $\Delta f = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ pour une fonction f de classe C^2. On peut aussi considèrer le problème de Dirichlet en dimension $d \in \mathbb{N}^*$ ($d = 3$ précédemment). Pour approcher numériquement une solution ϕ du problème lorsque la fonction b est donnée, on peut discrétiser le problème (ce qui est utile en pratique vu que les solutions ne sont pas explicites en général). Pour simplifier, on supposera que $D =]-A, A[^d$ est un cube avec $A \in \mathbb{N}^*$. On définit la grille D_N comme l'intersection de D et du réseau $\frac{A}{N}\mathbb{Z}^d$. On dit alors que deux éléments x et y de $\frac{A}{N}\mathbb{Z}^d$ sont voisins, et on note $x \sim y$, si $\|x - y\| = \frac{A}{N}$ où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$. L'opérateur laplacien est remplacé par l'opérateur aux différences :

$$\Delta_N f(x) = \frac{1}{2d} \sum_{y \sim x} (f(y) - f(x)) .$$

Cette substitution est justifiée par le fait que

$$\Delta_N f(x) = \frac{A^2}{N^2 2d} \Delta f(x) + o\left(\frac{1}{N^2}\right).$$

Dans la suite on supposera que $N = A$ pour simplifier. On dira qu'une fonction f est harmonique sur D_A si $\Delta_A f = 0$ sur D_A. Le problème de Dirichlet discret est alors le suivant : trouver ϕ_A harmonique sur D_A telle que ϕ_A coïncide avec b sur le bord du cube discrétisé ∂D_A. Nous admettrons l'existence d'une telle fonction ϕ_A.

Nous allons donner une méthode probabiliste qui permet de simuler la solution du problème discrétisé. Cette méthode est basée sur les temps de sortie d'une marche aléatoire. Plus précisément, on se donne une suite $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ de v.a i.i.d telle que

$$\mathbb{P}(X_1 = e_i) = \mathbb{P}(X_1 = -e_i) = \frac{1}{2d}, \quad i = 1, \dots, d,$$

où $e_1, \dots, e_d$ sont les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^d$. Si $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ (et $S_0 = 0$), on définit pour $x \in D_A$, le temps d'arrêt

$$T_x = \inf\{n \in \mathbb{N} : x + S_n \in \partial D_A\} .$$

1. On note $< \cdot, \cdot >$ le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^d$. En étudiant les martingales arrêtées $< e_i, S^{T_x} >$, montrer que T_x est fini p.s.
2. On définit alors la fonction h sur le cube discrétisé $D_A \cup \partial D_A$ par $h(x) = \mathbb{E}(b(x + S_{T_x}))$.
   (a) Montrer que le processus $(M_n)_n$ défini par $M_n = b(x + S_n)$ est une martingale pour la filtration naturelle associée à la suite $(X_n)_n$.

(b) En appliquant le théorème d'arrêt, montrer que $h(x) = \phi_A(x)$ pour tout $x \in D_A$. Comment simuler en pratique l'unique solution du problème de Dirichlet discrétisé ?

Exercice 17 [Machines à sous]

Un joueur a le choix entre deux machines à sous A et B. On suppose que le joueur gagne le même gain avec l'une ou l'autre des machines (1 unité) et que la probabilité de gagner avec la machine A (resp. B) est p^A (resp. p^B). Ces probabilités sont inconnues du joueur. L'objectif de ce problème est de construire, à partir de plusieurs essais, une stratégie d'apprentissage pour cerner la machine qui donne le plus de chances de gagner. Pour cela, on définit une famille $\left\{\left(X_n^A\right)_n, \left(X_n^B\right)_n\right\}$ de v.a indépendantes telles que pour tout n, X_n^A (resp. X_n^B) suive une loi de de Bernoulli de paramètre p^A (resp. p^B). En notant $(\mathcal{A}_n)_n$ la filtration naturelle associée, on se donne un processus $(U_n)_n$ adapté et à valeurs dans $\{A, B\}$. On définit alors un processus $(X_n)_n$ par

$$X_{n+1} = \mathbb{1}_{\{U_n=A\}} X_{n+1}^A + \mathbb{1}_{\{U_n=B\}} X_{n+1}^B = X_{n+1}^{U_n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

et on pose

$$G_n = \sum_{j=1}^{n} X_j, \quad n \geq 1,$$

en convenant que $G_0 = 0$.

1. Calculer $\mathbb{E}\left(X_{n+1} | \mathcal{A}_n\right)$.
2. On définit le processus $(M_n)_n$ par $M_0 = 0$ et si $n \in \mathbb{N}^*$,

$$M_n = \sum_{j=1}^{n} \left(X_j - p^{U_{j-1}}\right).$$

Vérifier que c'est une martingale de carré intégrable et calculer son processus croissant prévisible. En déduire la convergence p.s vers 0 de la suite de terme général $\frac{G_n}{n} - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} p^{U_{j-1}}$.

3. Pour $J \in \{A, B\}$, on définit les processus N^J, M^J et $\widetilde{p}^J$ par

$$N_n^J = \sum_{j=0}^{n} \mathbb{1}_{\{U_j=J\}}, \quad M_n^J = \sum_{j=1}^{n} \left(\mathbb{1}_{\{U_{j-1}=J, X_j=1\}} - \mathbb{1}_{\{U_{j-1}=1\}} p^J\right)$$

avec $M_0^J = 0$ et si $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\widetilde{p}_n^J = \frac{1}{N_{n-1}^J} \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{1}_{\{U_j=J, X_{j+1}=1\}},$$

avec la convention $\frac{0}{0} = 0$.

Démontrer que M^J est une martingale de carré intégrable et calculer son processus croissant prévisible. En déduire que sur l'évènement $\left\{N_n^J \to +\infty\right\}$, la suite de terme général $\widetilde{p}_n^J$ converge p.s vers p^J.

4. Dans cette question, on suppose $p^A > p^B$. On se donne une suite strictement croissante d'entiers positifs $(v_n)_n$ telle que $\frac{v_n}{n} \to +\infty$. Le joueur adopte le processus de choix U tel que

$$U_n = \begin{cases} A\mathbb{1}_{\{\widetilde{p}_n^A \geq \widetilde{p}_n^B\}} + B\mathbb{1}_{\{\widetilde{p}_n^A < \widetilde{p}_n^B\}}, \text{ si } n \notin \{v_j : j \in \mathbb{N}\}, \\ A \text{ si } n \in \{v_{2j} : j \in \mathbb{N}\}, \\ B \text{ si } n \in \{v_{2j+1} : j \in \mathbb{N}\}, \end{cases}$$

Etudier dans ce cas la convergence p.s des suites de terme général $\frac{N_n^J}{n}$, $J \in \{A, B\}$ ainsi que la convergence p.s de la suite de terme général $\frac{G_n}{n}$.

Chapitre 3

Processus de Lévy et martingales à temps continu

3.1 Définition des processus de Lévy

Définition 13 1. *On dit qu'un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est à accroissements indépendants si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tous les $n-$uplets $(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}_+^n$ tels que $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, les variables aléatoires $X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ sont mutuellement indépendantes.*

2. *On dit qu'un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est à accroissements stationnaires si la loi de $X_{t+h}-X_t$ coïncide avec la loi de X_h pour tous les couples $(t,h) \in \mathbb{R}_+^2$.*

Remarque. On peut facilement vérifier que $(X_t)_t$ est à accroissements indépendants si et seulement si pour tout couple $(t,s) \in \mathbb{R}_+^2$ tel que $s \leq t$,

$$X_t - X_s \perp\!\!\!\perp \sigma\left(X_u : u \leq s\right).$$

Définition 14 *Un processus de Lévy est un processus nul en $t = 0$, à accroissements indépendants et stationnaires.*

Remarque. On voit alors que si $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un processus de Lévy, alors pour tout $(s,t) \in \mathbb{R}_+^2$, le processus $(X_{t+s} - X_s)_{t\in\mathbb{R}_+}$ a la même loi que le processus $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ et est indépendant de la sous-tribu $\sigma\left(X_u : u \leq s\right)$.

3.1.1 Le processus de Poisson

Définition 15 *Un processus de comptage qui est aussi un processus de Lévy est un appelé processus de Poisson simple.*

Nous admettrons le résultat suivant.

Théorème 8 *Pour un processus de Poisson simple, la suite $(T_{i+1} - T_i)_{i\in\mathbb{N}}$ des délais inter-arrivées est une suite de v.a i.i.d, toutes de loi exponentielles de paramètre $\lambda = \frac{1}{\mathbb{E}(T_1)}$. Le paramètre $\lambda > 0$ est appelé intensité du processus.*

Conséquence. Si $(N_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un processus de Poisson simple d'intensité λ, alors on a la représentation $T_i = X_1 + \cdots + X_i$ pour $i \in \mathbb{N}^*$ où $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de v.a i.i.d et toutes de loi exponentielle de paramètre λ. De plus, T_i suit une loi $\gamma(i, \lambda)$, c'est-à-dire que

$$f_{T_i}(x) = \mathbb{1}_{x\geq 0}\lambda^i \frac{x^{i-1}}{(i-1)!}\exp(-\lambda x).$$

Proposition 12 *Si $t > 0$, alors $N_t \sim \mathcal{P}(\lambda t)$.*

Par conséquent, lorsque $s < t$, $N_t - N_s$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda(t-s)$.

Preuve. En utilisant les notations introduites ci-dessus, on a, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N_t = n) &= \mathbb{P}(T_n \leq t, T_n + X_{n+1} > t) \\
&= \int_0^t \left\{\int_{t-x}^{+\infty} \lambda \exp(-\lambda y)\, dy\right\} \frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!}\exp(-\lambda x)\, dx \\
&= \lambda^n \exp(-\lambda t)\int_0^t \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}dx \\
&= \frac{(\lambda t)^n \exp(-\lambda t)}{n!}.\square
\end{aligned}$$

3.1.2 Le processus de Poisson composé

Définition 16 *Un processus de Poisson composé $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un processus admettant une représentation de la forme $X_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$ où N est un processus de Poisson simple et $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de v.a i.i.d et indépendante de N. On convient que $X_t(\omega) = 0$ lorsque $N_t(\omega) = 0$.*

Proposition 13 *Un processus de Poisson composé est un processus de Lévy.*

Preuve. Soit k un entier plus grand que 2 et $h_1, \ldots, h_k$ des fonctions boréliennes bornées. Alors

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}\left(h_1\left(X_{t_1}\right) h_2\left(X_{t_2}-X_{t_1}\right) \cdots h_k\left(X_{t_k}-X_{t_{k-1}}\right)\right) \\
= & \sum_{0 \leq \ell_1 \leq \cdots \leq \ell_k} \mathbb{E}\left(h_1\left(\sum_{i=1}^{\ell_1} Y_i\right) \cdots h_k\left(\sum_{i=\ell_{k-1}+1}^{\ell_k} Y_i\right)\right) \mathbb{P}\left(N_{t_1}=\ell_1, \ldots, N_{\ell_k}=\ell_k\right) \\
= & \sum_{0 \leq \ell_1 \leq \cdots \leq \ell_k} \mathbb{E}\left(h_1\left(\sum_{i=1}^{\ell_1} Y_i\right)\right) \cdots \mathbb{E}\left(h_k\left(\sum_{i=\ell_{k-1}+1}^{\ell_k} Y_i\right)\right) \mathbb{P}\left(N_{t_1}=\ell_1, \ldots, N_{\ell_k}=\ell_k\right) \\
= & \sum_{0 \leq \ell_1 \leq \cdots \leq \ell_k} \mathbb{E}\left(h_1\left(\sum_{i=1}^{\ell_1} Y_i\right)\right) \cdots \mathbb{E}\left(h_k\left(\sum_{i=1}^{\ell_k-\ell_{k-1}} Y_i\right)\right) \mathbb{P}\left(\left\{N_{t_1}=\ell_1\right\} \cap_{i=1}^{k-1}\left\{N_{t_{i+1}}-N_{t_i}=\ell_{i+1}-\ell_i\right\}\right) \\
= & \sum_{0 \leq \ell_1 \leq \cdots \leq \ell_k} \mathbb{E}\left(h_1\left(\sum_{i=1}^{\ell_1} Y_i\right)\right) \cdots \mathbb{E}\left(h_k\left(\sum_{i=1}^{\ell_k-\ell_{k-1}} Y_i\right)\right) \mathbb{P}\left(N_{t_1}=\ell_1\right) \cdots \mathbb{P}\left(N_{t_k}-N_{t_{k-1}}=\ell_k-\ell_{k-1}\right) \\
= & \sum_{(j_1, \ldots, j_k) \in \mathbb{N}^k} \mathbb{E}\left(h_1\left(\sum_{i=1}^{j_1} Y_i\right)\right) \cdots \mathbb{E}\left(h_k\left(\sum_{i=1}^{j_k} Y_i\right)\right) \mathbb{P}\left(N_{t_1}=j_1\right) \cdots \mathbb{P}\left(N_{t_k-t_{k-1}}=j_k\right) \\
= & \mathbb{E}\left(h_1\left(X_{t_1}\right)\right) \mathbb{E}\left(h_2\left(X_{t_2-t_1}\right)\right) \cdots \mathbb{E}\left(h_k\left(X_{t_k-t_{k-1}}\right)\right).
\end{aligned}$$

Ces calculs suffisent à démontrer le résultat.□

Exemple d'utilisation. Les modèles de ruine en actuariat.

- N_t désigne le nombre de sinistres survenus avant l'instant t.
- Y_i désigne le montant du sinistre n°i.
- X_t représente le coût total des sinistres survenus avant l'instant t.

On introduit également c la prime d'assurance par unité de temps et w la réserve initiale. Alors la probabilité p_T de non-ruine de la compagnie d'assurance avant l'instant $T > 0$ s'écrit

$$p_T = \mathbb{P}\left(w + ct - X_t \geq 0; t \leq T\right).$$

3.1.3 Le mouvement Brownien

Le mouvement brownien, ou processus de Wiener, est un processus de base pour de nombreuses modélisations. On peut le voir comme l'analogue à temps continu d'une marche aléatoire centrée. Les trajectoires de ce processus qui sont continues mais très irrégulières (non-dérivabilité en tout point) permettent d'appréhender certains phénomènes qualifiés de chaotiques, comme le mouvement d'une particule immergée dans un liquide et soumis aux intéractions moléculaires de ce dernier ou encore les fluctuations du cours des actions en bourse. On peut le construire en utilisant les résultats d'existence pour les processus gaussiens, mais il est plus naturel de le considérer comme la limite d'une suite de marches aléatoires.

Pour simplifier on se restreindra à des indices de temps $t \in I = [0, 1]$, mais on peut étendre la construction donnée ci-dessous à tout $\mathbb{R}_+$. On se donne une suite $(\xi_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires i.i.d telle que

$$\mathbb{P}(\xi_1 = -1) = \mathbb{P}(\xi_1 = 1) = \frac{1}{2}.$$

On pose alors

$$Z_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_{i=1}^{[nt]} \xi_i + (nt - [nt])\, \xi_{[nt]+1} \right), \qquad t \in I, \tag{3.1}$$

en adoptant la convention $\sum_{i=1}^{0} = 0$. Z_n est donc une variable aléatoire à valeurs dans $F = C(I, \mathbb{R})$, ensemble des fonctions continues sur I et à valeurs réelles que nous munirons de sa tribu borélienne (la topologie sur F est celle associée à la norme du supremum). Ainsi $\mathbb{P}_{Z_n}$ (loi de Z_n sous $\mathbb{P}$) est une mesure de probabilité sur $(F, \mathcal{B}(F))$. Les Figures 3.1, 3.2 et 3.3 montrent des trajectoires obtenues pour Z_N lorsque $N = 10, 100, 3000$ respectivement. La question est alors de savoir si la suite des lois $(\mathbb{P}_{Z_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge. La convergence considérée est la convergence étroite. Le théorème de Donsker (1951) assure que $\mathbb{P}_{Z_n}$ converge étroitement vers une mesure de probabilité ν sur $(F, \mathcal{B}(F))$ au sens où

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\,(h(Z_n)) = \nu(B),$$

pour toute fonction $h : F \to \mathbb{R}$ continue bornée. La mesure ν est appelée mesure de Wiener. En fait la convergence vaut aussi pour des suites $(\xi)_{n\in\mathbb{N}}$ plus générales.

Théorème 9 (Donsker) *Soit $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires i.i.d centrées et de variance* 1. *Alors la suite de processus $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (où Z_n est défini en (3.1)) converge en loi vers la mesure de Wiener.*

On peut alors construire un espace probabilisé sur lequel est défini un processus $(B_t)_{t\geq 0}$ tel que $\mathbb{P}_B = \nu$. Il suffit de prendre $\Omega = F$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(F)$, $\mathbb{P} = \nu$ et de poser

$$B_t(\omega) = \omega(t), \quad \forall \omega \in F.$$

Le théorème (9) assure de la convergence des lois fini-dimensionnelles :

$$\lim_{n\to\infty} (Z_n(t_1), \ldots, Z_n(t_k)) = \left(B_{t_1}, \ldots, B_{t_k}\right), \text{ en loi }, \tag{3.2}$$

pour tout $t_1 < t_2 < \ldots, t_k$. Il suffit d'appliquer le théorème de Donsker en considérant des fonctions de la forme $f \to h\,(f(t_1), \ldots, f(t_n))$ où $h : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ est continue bornée. Mais on peut aussi prouver directement (3.2) à partir du théorème central limite ce qui permet de montrer que le vecteur $(B_{t_1}, \ldots, B_{t_k})$, a ses accroissements indépendants et suit une loi gaussienne centrée et de covariance $\Sigma = \left(t_i \wedge t_j\right)_{1\leq i,j\leq k}$. Ceci donne lieu à la définition suivante.

Définition 17 *On appelle mouvement brownien B tout processus gaussien à trajectoires continues défini sur un espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et caractérisé par*

$$\mathbb{E}\,(B_t) = 0, \quad Cov\,(B_s, B_t) = s \wedge t, \quad (s,t) \in \mathbb{R}_+^2.$$

Un mouvement brownien est donc un processus de Lévy.

Remarques

1. On a $B_0 = 0$ p.s.
2. On peut montrer que tout processus de Lévy peut être construit par sommation de processus indépendants qui sont soit des processus de Poisson composés, soit des processus du type $(\sigma B_t + \alpha t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ où B est un mouvement brownien et $(\sigma, \alpha) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.
3. La convergence donnée par le théorème de Donsker est plus forte que la simple convergence des lois fini-dimensionnelles. Par exemple, elle assure la convergence des lois des v.a $\sup_{t\in I} Z_n(t)$ vers la loi de la v.a $\sup_{t\in I} B_t$.
4. Il est également possible de définir un mouvement brownien $(B_t)_{t\geq 0}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ pour $d \geq 1$. On pose $B_t = \left(B_t^{(1)}, \ldots, B_t^{(d)}\right)$ où $B^{(1)}, \ldots, B^{(d)}$ sont des mouvements browniens à valeurs réelles et indépendants.
5. On peut montrer que les trajectoires du mouvement brownien sont p.s nulle part dérivables. Montrons un résultat plus faible, à savoir que pour t donné positif, les trajectoires sont p.s non dérivables au point t. La probabilité d'être dérivable au point t est plus petite que $\mathbb{P}(A_t)$ où
$$A_t = \bigcup_{(k,n_0)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*} \bigcap_{n\geq n_0} \left\{n\left|B_{t+\frac{1}{n}} - B_t\right| < k\right\}.$$
Mais
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_t) &\leq \sum_{(k,n_0)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*} \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\geq n_0}\left\{n\left|B_{t+\frac{1}{n}} - B_t\right| < k\right\}\right)\\ &\leq \sum_{(k,n_0)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*} \inf_{n\geq n_0} \mathbb{P}\left(n\left|B_{t+\frac{1}{n}} - B_t\right| < k\right).\end{aligned}$$
Or $B_{t+\frac{1}{n}} - B_t$ suit la loi $\mathcal{N}\left(0, n^{-1}\right)$. Si $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, on obtient
$$\mathbb{P}\left(\left\{n\left|B_{t+\frac{1}{n}} - B_t\right| < k\right\}\right) = \mathbb{P}\left(|Z| < \frac{k}{\sqrt{n}}\right) \to_{n\to+\infty} 0.$$
On en déduit que $\mathbb{P}(A_t) = 0$ ainsi que le résultat annoncé.

3.2 Martingales à temps continu

Dans toute cette section, on ne considère que des processus $(X_t)_{t\geq 0}$ dont les trajectoires sont continues à droite et avec des limites à gauche.

Définition 18 *Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ une filtration. Un processus $\mathbf{X} = (X_t)_{t\geq 0}$ est une $\mathcal{F}-$martingale (resp. sous-martingale, sur-martingale) si*

1. $\mathbf{X}$ *est $\mathcal{F}$-adapté ;*
2. *pour tout $t \geq 0$, $\mathbb{E}(|X_t|) < +\infty$.*
3. *Pour tout couple $(s,t) \in \mathbb{R}_+^2$ tel que $s < t$,*
$$\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) = (\textit{ resp. } \geq, \leq) X_s.$$

Exemples

1. Le mouvement brownien B si on considère sa filtration naturelle.
2. Il est aussi possible de considèrer les équivalents à temps continu des martingales à temps discret basées sur les marches aléatoires. En particuler si B est un mouvement brownien, les processus $\left(B_t^2 - t\right)_{t\geq 0}$ et $\left(\exp\left(\sigma B_t - \frac{\sigma^2 t}{2}\right)\right)_{t\geq 0}$ sont des martingales pour tout $\sigma \in \mathbb{R}$, en considérant la filtration naturelle associée à B.
3. Un processus de Poisson simple $(N_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ n'est pas une martingale. En revanche $(N_t - \lambda t)_{t\geq 0}$ est une martingale en considérant la filtration naturelle associée à N.

La proposition suivante montre en particulier qu'un processus de Lévy recentré est une martingale.

Proposition 14 *Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus à accroissements indépendants et intégrable. Alors le processus $(X_t - \mathbb{E}(X_t))_{t\geq 0}$ est une martingale.*

Le théorème d'arrêt se généralise au cas des martingales à temps continu. En particulier, nous avons les deux résultats suivants.

Théorème 10 *Si $(X_t)_{t\geq 0}$ est une martingale et T un temps d'arrêt borné, alors X_T est intégrable et $\mathbb{E}(X_T) = \mathbb{E}(X_0)$.*

Proposition 15 *Si $(X_t)_{t\geq 0}$ est une $\mathcal{F}$-martingale et T un temps d'arrêt, alors le processus arrêté X^T défini par $X_t^T(\omega) = X_{t\wedge T(\omega)}(\omega)$ est encore une $\mathcal{F}$-martingale.*

Application au mouvement brownien. Si B est un mouvement brownien, on définit

$$T = \inf\{t \geq 0 : B_t \notin]-a, b[\},$$

où a et b sont deux réels positifs. De façon analogue au problème de la ruine du joueur, nous allons établir que T est fini p.s, que $\mathbb{P}(B_T = -a) = \frac{b}{a+b}$ et que $\mathbb{E}(T) = ab$. Observons tout d'abord que T est un temps d'arrêt pour la filtration naturelle associée au brownien. Ceci peut se voir directement en écrivant pour $t \geq 0$,

$$\{T \leq t\} = \bigcap_{k>\frac{2}{a+b}, k\in\mathbb{N}} \bigcup_{s\in\mathbb{Q}\cap[0,t]} \left\{B_s \notin]-a+\frac{1}{k}, b-\frac{1}{k}[\right\}.$$

Ensuite, en considérant les deux martingales $(B_t)_{t\geq 0}$ et $\left(B_t^2 - t\right)_{t\geq 0}$ ainsi que le temps d'arrêt borné $T \wedge N$, le théorème d'arrêt entraine les deux relations

$$\mathbb{E}(B_{T\wedge N}) = 0, \quad \mathbb{E}\left(B_{T\wedge N}^2\right) = \mathbb{E}(T \wedge N).$$

Ensuite, comme pour le problème de la ruine du joueur, on montre que $\mathbb{E}(T) < +\infty$ en utilisant la convergence monotone puis en utilisant la convergence dominée,

$$\mathbb{E}(B_T) = 0 = -a\mathbb{P}(B_T = -a) + b\mathbb{P}(B_T = b), \quad \mathbb{E}(T) = a^2\mathbb{P}(B_T = -a) + b^2\mathbb{P}(B_T = b).$$

Ces deux dernières égalités conduisent au résultat annoncé.

Les résultats de convergence valable pour le cas discret se généralisent au temps continu. En particulier, lorsque $t \to +\infty$, nous avons le résultat suivant.

Théorème 11 – *Toute martingale bornée dans $\mathbb{L}^1$ converge p.s vers une variable aléatoire intégrable.*
- *Toute martingale uniformément intégrable converge p.s et dans $\mathbb{L}^1$.*
- *Toute martingale bornée dans $\mathbb{L}^2$ converge p.s et dans $\mathbb{L}^2$.*

Nous pouvons également généraliser la notion de crochet d'une martingale.

Théorème 12 *Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ une martingale de carré intégrable et dont les trajectoires sont continues. Alors il existe un unique processus, noté $(<X>_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ croissant, adapté, nul en 0 et à trajectoires continues tel que le processus $\left(X_t^2 - <X>_t\right)_{t\in\mathbb{R}_+}$ soit une martingale. De plus, pour toute suite de subdivisions $\left(\{t_1^{(n)}, \ldots, t_{p_n}^{(n)}\}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de l'intervalle $[0,t]$ dont le pas $\max_{1\leq i\leq p_n-1} |t_{i+1}^{(n)} - t_i^{(n)}|$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$, on a*

$$<X>_t = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{p_n-1} \left(X_{t_{i+1}^{(n)}} - X_{t_i^{(n)}}\right)^2,$$

où la limite a lieu en probabilité. On dit $<X>$ est la variation quadratique de X.

Exemple. Si B est un mouvement brownien, alors on a vu que le processus $\left(B_t^2 - t\right)_{t\in\mathbb{R}_+}$ était une martingale. Ceci entraine que $<B>_t = t$.

3.3 Construction de l'intégrale de Wiener

Soit $T > 0$. Notons $\mathcal{E}_T$ l'ensemble des fonctions $f : [0,T] \to \mathbb{R}$ de la forme $f(s) = a_0 \mathbb{1}_{s=0} + \sum_{i=1}^k a_i \mathbb{1}_{t_{i-1}<s\leq t_i}$ où $\{t_0, \ldots, t_k\}$ est une subdivision de $[0,T]$ (avec $t_0 = 0$ et $t_k = T$) et $a_0, a_1, \ldots, a_k$ sont des nombres réels arbitraires. Pour tout $f \in \mathcal{E}_T$, on pose

$$\int_0^T f(s)dB_s = \sum_{i=1}^k a_i \left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right).$$

Pour $(\lambda, f, g) \in \mathbb{R} \times \mathcal{E}_T^2$, on a alors

$$\int_0^T (\lambda f)(s)dB_s = \lambda \int_0^T f(s)dB_s, \quad \int_0^T (f+g)(s)dB_s = \int_0^T f(s)dB_s + \int_0^T g(s)dB_s.$$

La deuxième égalité se montre en prenant une subdivision commune à f et à g. De plus, il est facile de vérifier que pour tout $f \in \mathcal{E}_T$,

$$\mathbb{E}\left|\int_0^T f(s)dB_s\right|^2 = \int_0^T f(s)^2 ds.$$

Si maintenant, $f : [0,T] \to \mathbb{R}$ vérifie $\int_0^T f(s)^2 ds < +\infty$, alors on peut montrer qu'il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{E}_T$ telle que $\int_0^T |f_n(s) - f(s)|^2 ds \to 0$. Comme

$$E\left|\int_0^T f_m(s)ds - \int_0^T f_n(s)ds\right|^2 = \int_0^T |f_m(s) - f_n(s)|^2 ds,$$

on voit que la suite $\left(\int_0^T f_n(s)dB_s\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{L}^2$ donc convergente dans $\mathbb{L}^2$. On peut montrer facilement que la limite obtenue ne dépend pas de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ choisie pour approcher f. Cette limite est notée $\int_0^T f(s)dB_s$.

Si maintenant, on a $\int_0^T f(s)^2 ds < +\infty$ pour tout $T > 0$, on peut définir un processus $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ tel que

$$X_t = \int_0^t f(s)dB_s, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Ce processus est adapté à la filtration naturelle associée au mouvement brownien. Dans ce cas on posera pour $s < t$,

$$\int_s^t f(u)dB_u = X_t - X_s.$$

Proposition 16 *1. Le processus $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un processus gaussien et à accroissements indépendants. Sa moyenne est nulle et sa covariance est donnée par*

$$Cov\,(X_s, X_t) = \int_0^{s\wedge t} f(u)^2 du, \quad (s,t) \in \mathbb{R}_+^2.$$

2. Pour $t \geq 0$, posons $F(t) = \int_0^t f(u)^2 du$ et $Y_t = B_{F(t)}$. Alors le processus $(Y_t)_{t\geq 0}$ a la même loi que le processus $(X_t)_{t\geq 0}$.

Remarques

1. Le premier point de la proposition précédente assure que le processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est une martingale pour la filtration naturelle associée au mouvement brownien.
2. On peut voir le processus $(Y_t)_{t\geq 0}$ comme un mouvement Brownien "changé de temps".

Preuve de la Proposition 16.

1. Il suffit de prouver que pour des indices $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, le vecteur

$$V = (X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$$

est composé de v.a mutuellement indépendantes de toutes de loi gaussienne. En particulier, ceci prouvera que V est un vecteur gaussien et comme

$$(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}) = f(V),$$

où $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est l'application linéaire définie par

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, x_1 + x_2, \ldots, x_1 + x_2 + \cdots + x_n),$$

nous aurons montré que $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ est un vecteur gaussien, donc que le processus $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est bien gaussien.

Soit $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{E}_{t_n}$ qui approche f dans $\mathbb{L}^2\left([0, t_n]\right)$. Quitte à rajouter certains points, on peut toujours supposer que les points $t_1, \ldots, t_n$ font partie de la subdivision associée à f_k et ce pour tout $k \in \mathbb{N}$. On peut facilement montrer que $V = \lim_{k\to+\infty} V_k$ dans $\mathbb{L}^2$, où

$$V_k = \left(\int_0^{t_1} f_k(u)dB_u, \int_{t_1}^{t_2} f_k(u)dB_u, \ldots, \int_{t_{n-1}}^{t_n} f_k(u)dB_u\right),$$

est un vecteur gaussien (car combinaison linéaire de certaines coordonnées de B). De plus V_k est centré et ses composantes décorrélées deux à deux. On en déduit que V a ses composantes centrées, décorrélées deux à deux et que

$$\mathrm{Var}\left(X_{t_{j+1}} - X_{t_j}\right) = \lim_{k\to+\infty} \mathrm{Var}\left(\int_{t_j}^{t_{j+1}} f_k(u)dB_u\right) = \lim_{k\to+\infty} \int_{t_j}^{t_{j+1}} f_k(u)^2 du = \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(u)^2 du,$$

pour tout $j = 0, \ldots, n-1$ (en posant $t_0 = 0$). Dans un vecteur gaussien, la décorrélation entraine l'indépendance. On en déduit que les composantes de V sont indépendantes. Ceci prouve que le processus $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un processus gaussien et à accroissements indépendants. Enfin si $s < t$,

$$\mathrm{Cov}\,(X_s, X_t) = \mathrm{Var}\,(X_s) = \int_0^s f(u)^2 du,$$

ce qui prouve la dernière assertion.

2. Le processus $(Y_t)_{t\geq 0}$ est un processus gaussien centré. Pour prouver le résultat annoncé, il suffit de montrer que $\mathrm{Cov}\,(Y_s, Y_t) = \mathrm{Cov}\,(X_s, X_t)$ pour tous $s \leq t$, ce qui est évident vu que $\mathrm{Cov}\,(Y_s, Y_t) = F(t) \wedge F(s) = F\,(s \wedge t)$.□

Exercice. En utilisant le résultat précédent, montrer que les processus $(Y_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ et $(Z_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ définis par

$$Y_t = \int_0^t f(u)dB_u - \int_0^t f(u)^2 du, \quad Z_t = \exp\left(\int_0^t f(u)dB_u - \frac{1}{2}\int_0^t f(u)^2 du\right)$$

sont des martingales pour la filtration naturelle associée au mouvement brownien B.

3.4 Exercices

Exercice 18 [*paradoxe de l'autobus*]

Soit $(N_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ un processus de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ dont la suite des temps de saut est notée $(T_k)_k$. On note $V_t = T_{N_t+1} - t$ et $W_t = t - T_{N_t}$.

1. Que repésentent les variables aléatoires V_t et W_t pour le processus de Poisson ?
2. Montrer que V_t est indépendante de $\sigma(N_s : s \leq t)$ et suit une loi exponentielle de paramètre λ.
3. Montrer également que W_t suit la loi

$$\lambda \exp(-\lambda u) \mathbb{1}_{0 \leq u < t} + \exp(-\lambda t) \delta_t(du).$$

4. En déduire la valeur de $\mathbb{E}(T_{N_t+1} - T_{N_t})$.
5. On s'intéresse aux temps de passage des autobus à une station et on suppose que les délais sont modélisés par des variables aléatoires i.i.d toutes de loi exponentielle de paramètre λ avec $\frac{1}{\lambda} = 5$ minutes. Pour une personne qui arrive tard à la station (t grand), quel est le temps moyen séparant l'autobus manqué du suivant ?

Exercice 19 On suppose qu'un processus de Poisson est observé aux temps $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$. En considérant la loi du vecteur $(N_{t_1}, N_{t_2} - N_{t_1}, \ldots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}})$, déterminer un estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre $\lambda > 0$.

Exercice 20 On considère le processus de Levy

$$X_t = a + bt + \sigma B_t, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

où B est un mouvement brownien et $(a, b\sigma) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+^*$. On suppose observée une réalisation du vecteur $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ pour des indices de temps $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$.

1. Quelle est la loi de ce $n-$uplet ?

2. Donner une expression du maximum de vraisemblance du triplet $\left(a, b, \sigma^2\right)$. On pourra se ramener à la loi du vecteur

$$(X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}).$$

Exercice 21 Démontrer la loi faible des grands nombres pour le mouvement brownien, c'est à dire que

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{B_t}{t} = 0 \text{ en probabilité.}$$

On pourra utiliser la décomposition

$$B_t = \sum_{i=1}^{[t]} (B_i - B_{i-1}) + B_t - B_{[t]},$$

où $[t]$ désigne la partie entière de t.

Exercice 22 Soit $M > 0$ et $f : [0, M] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que la variable aléatoire $X = \int_0^M f(s) B_s ds$ suit une loi gaussienne dont on précisera les paramètres.

EXERCICE 23 Un modèle proposé pour l'évolution des taux d'intérêt est le modèle de Vasicek dont l'équation est donnée par

$$X_t = \int_0^t a\,(b - X_s)\,ds + \sigma B_t, \quad X_0 = x_0. \tag{3.3}$$

où les paramètres a, b et σ sont des réels strictement positifs. Si on oublie le bruit B_t, on a une équation différentielle classique dont la solution est donnée par $X_t = b + (x_0 - b)\exp(-at)$. Le paramètre b représente un équilibre de long terme : les taux d'intérêt ne peuvent monter indéfiniment sous peine de ralentir l'activité économique et vont se statibiser autour de b sur le long terme. Le paramètre a représenté la vitesse à laquelle les trajectoires vont se regrouper autour de b. Enfin, σ représente l'amplitude de l'aléa qui rentre dans le système.

1. Montrer que l'équation (3.3) admet la solution explicite suivante.

$$X_t = x_0 \exp(-at) + b\,(1 - \exp(-at)) - \sigma \exp(-at) \int_0^t a \exp(as) B_s ds + \sigma B_t.$$

2. Montrer que X_t suit une loi gaussienne de moyenne m_t et de variance v_t données par

$$m_t = b + (x_0 - b)\exp(-at), \quad v_t = \frac{\sigma^2}{2a}(1 - \exp(-2at)).$$

3. Déterminer la loi limite de X_t.
4. On note $(\mathcal{F}_s)_{s\geq 0}$ la filtration naturelle du processus. Donner une expression de $\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s)$ pour $t > s$.

EXERCICE 24

1. Soit $(N_t)_{t\geq 0}$ un processus de Poisson d'intensité $\lambda > 0$. On note $M_t = (N_t - \lambda t)^2 - \lambda t$. Montrer que le processus $(M_t)_{t\geq 0}$ est une martingale relativement à la filtration engendrée par $(N_t)_{t\geq 0}$.
2. Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien. Si $M_t = B_t^3 - 3tB_t$. Montrer que $(M_t)_{t\geq 0}$ est une martingale pour la filtration naturelle associée au mouvement brownien.

3.5 Correction des exercices

EXERCICE 25

1. V_t représente le délai entre l'instant t et la date du premier évènement juste après t. W_t représente le temps écoulé depuis le dernier évènement survenu avant t. Ce sont donc deux v.a à valeurs positives.

2. Soit $u \geq 0$. Nous avons l'égalité

$$\begin{aligned}
\{V_t > u\} &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{V_t > u, N_t = n\} \\
&= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{T_{n+1} > t+u, N_t = n\} \\
&= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{N_{t+u} - N_t = 0, N_t = n\} \\
&= \{N_{t+u} - N_t = 0\}\,.
\end{aligned}$$

On en déduit que pour $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n \leq t$ et $(k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}^n$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(V_t > u, N_{t_1} = k_1, \ldots, N_{t_n} = k_n\right) &= \mathbb{P}\left(N_{t+u} - N_t = 0, N_{t_1} = k_1, \ldots, N_{t_n} = k_n\right) \\
&= \mathbb{P}\left(N_{t+u} - N_t = 0\right)\mathbb{P}\left(N_{t_1} = k_1, \ldots, N_{t_n} = k_n\right) \\
&= \exp(-\lambda u)\,\mathbb{P}\left(N_{t_1} = k_1, \ldots, N_{t_n} = k_n\right).
\end{aligned}$$

La deuxième inégalité est due à l'indépendance des accroissements du processus de Poisson et la troisième à leur stationarité et au fait que N_u suit une loi de Poisson de paramètre λu pour tout $u > 0$. Ceci suffit à prouver l'indépendance de V_t et de $(N_{t_1}, \ldots, N_{t_n})$ pour des indices $t_1, \ldots, t_n \leq t$ arbitraires. On en déduit que la variable aléatoire V_t est indépendante de $\sigma(N_u : u \leq t)$. De plus, comme $\mathbb{P}(V_t > u) = \exp(-\lambda u)$, V_t suit bien une loi exponentielle de paramètre λ.

3. Soit $u \geq 0$. On va évaluer $\mathbb{P}(W_t < u)$.
   - Supposons d'abord que $u > t$. Alors

     $$\{W_t < u\} = \{T_{N_t} > t - u\}\,.$$

     Comme $t - u < 0$, presque toute épreuve ω est dans cet évènement. On en déduit que $\mathbb{P}(W_t < u) = 1$.
   - Supposons maintenant que $u \leq t$. Alors

     $$\begin{aligned}
     \{W_t < u\} &= \{T_{N_t} > t - u\} \\
     &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \{T_n > t-u, N_t = n\} \\
     &= \{N_t - N_{t-u} > 0\}\,.
     \end{aligned}$$

     Justifions la dernière égalité. Si $\omega \in \Omega$ est tel que $T_n(\omega) > t - u$ et $N_t(\omega) = n$ pour un certain entier n, il y a forcément au moins un saut entre les instants $t-u$ et t (celui au temps $T_n(\omega)$). Donc $N_t(\omega) - N_{t-u}(\omega) > 0$. Inversement, supposons que $N_t(\omega) - N_{t-u}(\omega) > 0$. Alors il y a au moins un saut entre les instants $t-u$ et t. Si $n = N_t(\omega) \in \mathbb{N}^*$, l'instant h du premier saut entre $t - u$ et t vérifie $t - u < h \leq T_n(\omega)$.
     On en déduit que

     $$\mathbb{P}(W_t < u) = 1 - \mathbb{P}(N_{t-u} - N_t = 0) = 1 - \exp(-\lambda u)\,.$$

   Regardons alors la fonction de répartition F définie par $F(u) = \mathbb{P}(W_t \leq u)$. Si $u < t$,

   $$F(u) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(W_t < u + \frac{1}{n}\right) = 1 - \exp(-\lambda u)\,.$$

Si $u \geq t$, on a $u + \frac{1}{n} > t$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$$F(u) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(W_t < u + \frac{1}{n}\right) = 1.$$

La fonction de répartition F est bien celle de la loi

$$\lambda \exp(-\lambda u)\, \mathbb{1}_{0\leq u<t} du + \exp(-\lambda t)\, \delta_t(du).$$

Remarque. Le calcul direct de $\mathbb{P}(W_t > u)$ peut aussi se faire. Cette probabilité vaut 0 si $u \geq t$. Mais lorsque $0 \leq u < t$, on a juste l'égalité

$$\{W_t > u\} = \{N_t - N_{t-u} = 0\} \setminus \{W_t = u\}.$$

Il faut alors remarquer que

$$\mathbb{P}(W_t = u) = \mathbb{P}(T_{N_t} = t - u) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T_k = t - u, N_t = k) = 0,$$

en utilisant le fait que $T_1, T_2, \ldots$ ont des lois à densité.

4. On a $\mathbb{E}(T_{N_t+1} - T_{N_t}) = \mathbb{E}(V_t) + \mathbb{E}(W_t)$. Comme V_t suit une loi exponentielle, on a $\mathbb{E}(V_t) = \frac{1}{\lambda}$. De plus,

$$\mathbb{E}(W_t) = \int_0^t u\lambda \exp(-\lambda u)\, du + \exp(-\lambda t)\, t.$$

En utilisant une intégration par parties, on trouve $\mathbb{E}(W_t) = \frac{1-\exp(-\lambda t)}{\lambda}$.

5. On trouve $\lim_{t\to+\infty} \mathbb{E}(T_{N_t+1} - T_{N_t}) = \frac{2}{\lambda} = 10$ min. Cette apparente contradiction vient du fait que $T_{N_t+1} - T_{N_t}$ ne se comporte pas comme l'un des délais $T_{k+1} - T_k$ car l'indice k de l'intervalle est aussi aléatoire. Une autre chose remarquable est que le délai V_t a déjà une moyenne égale à $\frac{1}{\lambda}$. La loi exponentielle de ce délai s'explique par l'absence de vieillissement de la loi exponentielle. On peut en fait montrer que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(V_t > u | N_t = k) &= \mathbb{P}(X_{k+1} > t + u - T_k | X_{k+1} > t - T_k, T_k \leq t) \\ &= \exp(-\lambda u).\end{aligned}$$

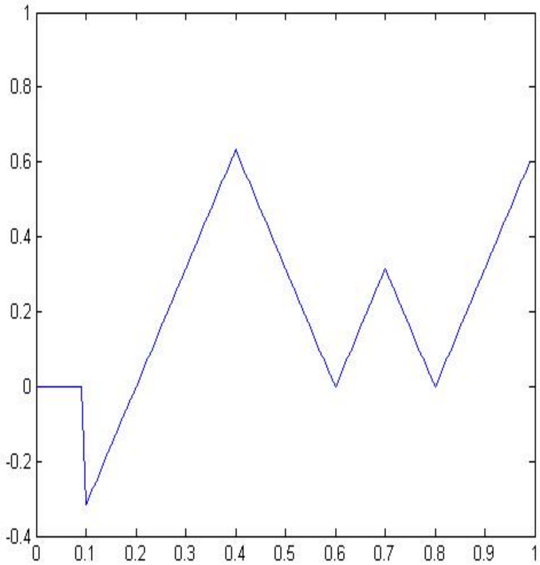

FIGURE 3.1 – $t \to Z_{10}(t)$

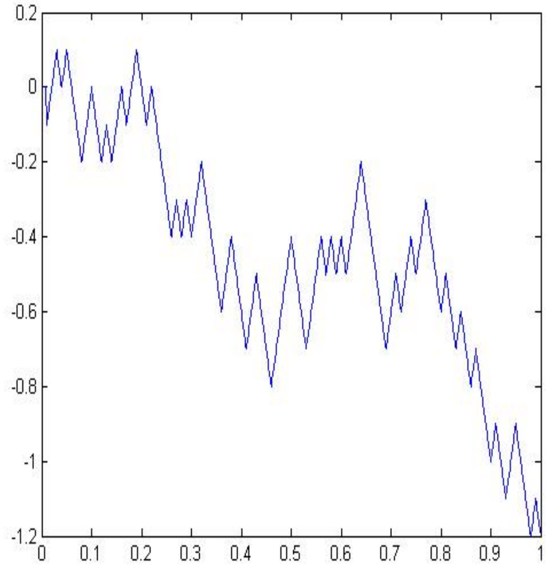

FIGURE 3.2 – $t \to Z_{100}(t)$

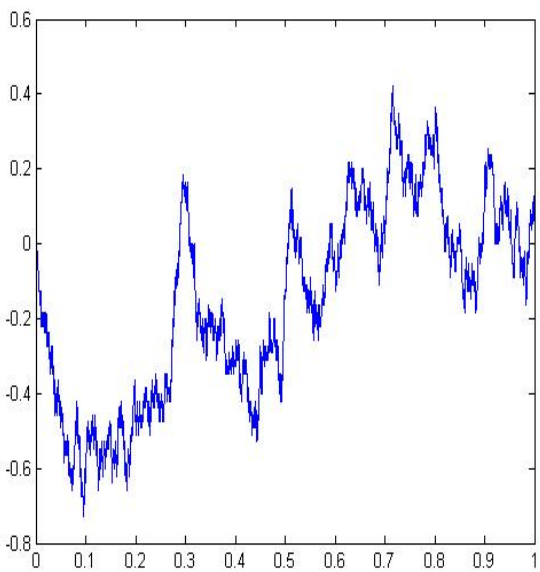

FIGURE 3.3 – $t \to Z_{3000}(t)$

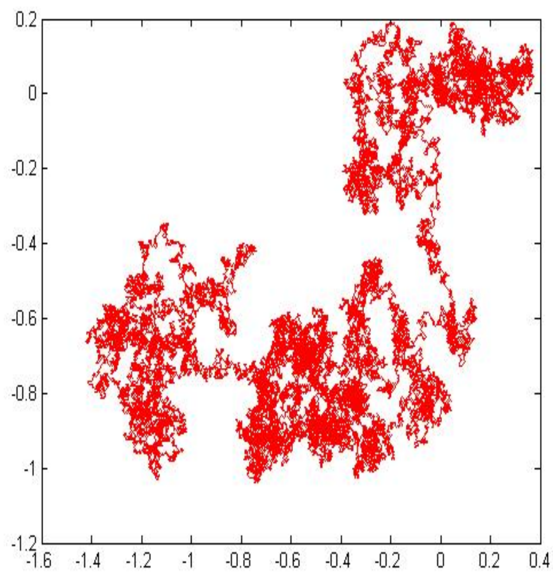

FIGURE 3.4 – Approximation de la trajectoire d'un brownien 2D