TD 1. Méthodes de base en séries temporelles

Exercice 1 Justifier par une démonstration mathématique les points suivants.

1. L'ensemble des moyennes mobiles est stable par composition.
2. L'ensemble des moyennes mobiles centrées est stable par composition.
3. L'ensemble des moyennes mobiles centrées symétriques est stable par composition.

Exercice 2 Soit d un entier positif non nul.

1. Montrer qu'une moyenne mobile centrée laisse invariant tout polynôme de degré d si et seulement si ses coefficients vérifient les équations

$$\sum_{i=-p}^{p} \theta_i = 1, \quad \sum_{i=-p}^{p} i^\ell \theta_i = 0, \quad 1 \leq \ell \leq d.$$

2. Montrer que si $2p \geq d$ alors le système d'équations précédent admet des solutions.
3. Donner un exemple de moyenne mobile centrée, symétrique, d'ordre 5 qui préserve les polynômes de degré 2.

Exercice 3 Soit $(X_t)_t$ la série temporelle

$$X_t = m_t + s_t + \varepsilon_t$$

où $(m_t)_t$ est une tendance affine, $s_t = s_t^{(1)} + s_t^{(2)}$,

$$s_t^{(1)} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right), \quad s_t^{(2)} = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}t\right),$$

et $(\varepsilon_t)_t$ est une suite i.i.d $\mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)$.

1. Déterminer les périodes de $\left(s_t^{(1)}\right)_t$, $\left(s_t^{(2)}\right)_t$ et $(s_t)_t$.
2. Déterminer une moyenne mobile centrée et symétrique qui laisse invariantes $(m_t)_t$ ainsi que $\left(s_t^{(1)}\right)_t$ (resp. $\left(s_t^{(2)}\right)_t$, $(s_t)_t$).

Exercice 4 Considérons les moyennes mobiles suivantes

$$A_3 = \frac{1}{3}B^2\left(I + F + F^2\right), \quad A_4 = 2A_3 - A_3A_3.$$

1. Montrer que A_4 laisse invariantes les tendances linéaires.
2. Quelles sont les séries absorbées par A_4 ?
3. Calculer le rapport de réduction de variance de A_4.

Exercice 5 On souhaite construire une moyenne mobile simple qui annule les saisonnalités de période $2k$ pouvant varier linéairement avec le temps, c'est à dire qui s'écrit comme combinaison linéaire de suites de la forme $\left((a+bt)\cos\left(\frac{\pi jt}{k}\right)\right)_t$ et $\left((a+bt)\sin\left(\frac{\pi jt}{k}\right)\right)_t$. En raisonnant sur le polynôme caractéristique, montrer que la moyenne mobile

$$M = \frac{1}{2k}\left(B^{k-1} + \cdots + B + I + F + \cdots + F^k\right)\frac{1}{2k}\left(B^k + \cdots + B + I + F + \cdots + F^{k-1}\right)$$

résout le problème. Montrer que M est centrée, symétrique et que la somme de ses coefficients vaut 1 (sans développer M), donc conserve également les polynômes de degré 1. Dans le cas $k = 2$ (données trimestrielles), détailler l'expression de M.

Exercice 6 Soit $m \geq 1$ un nombre entier. On dit qu'une série $(X_t)_t$ est localement assimilable à un polynôme de degré p sur tout intervalle de longueur $2m+1$ si $X_t = \hat{a}_{0,t}$ où $(\hat{a}_{0,t}, \ldots, \hat{a}_{p,t})'$ minimise la fonction

$$(a_0, \ldots, a_p) \mapsto \sum_{h=-m}^{m}\left(X_{t+h} - \sum_{j=0}^{p} a_j h^j\right)^2. \tag{1}$$

1. Montrer que si $(X_t)_t$ est un polynôme de degré p alors $(X_t)_t$ est localement assimilable à un polynôme de degré p.
2. Pour une série quelconque $(X_t)_t$, on dit que l'on ajuste localement un polynôme de degré p sur tout intervalle de longueur $2m+1$, si on transforme $(X_t)_t$ en $\left(\hat{X}_t\right)_t$ avec $\hat{X}_t = \hat{a}_{0,t}$ et $(\hat{a}_{0,t}, \ldots, \hat{a}_{p,t})$ minimise (1).
   (a) Dans le cas $p = 3$, écrire les équations que doivent vérifier $\hat{a}_{0,t}, \ldots, \hat{a}_{3,t}$ et donner une expression de $\left(\hat{X}_t\right)_t$ sous la forme d'une moyenne mobile.
   (b) Plus généralement, justifier que $(\hat{X}_t)_t$ est toujours une moyenne mobile d'ordre $2m+1$, notée M_{2m+1}^p (on ne cherchera pas l'expression de M_{2m+1}^p) qui laisse invariante tout polynôme de degré p.

Exercice 7 Soit $(X_t)_t$ une suite de variables aléatoires centrées, de variance 1 et telle qu'il existe $-1 < \alpha < 1$ tel que $\mathrm{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \alpha^h$ pour $h \in \mathbb{N}$. Pour un entier $T \geq 2$, on note $\hat{X}_T(1)$ la prévision de X_T en utilisant le lissage exponentiel simple de paramètre β. Montrer que

$$\mathbb{E}\left[X_{T+1} - \hat{X}_T(1)\right]^2 = \frac{2(1-\alpha)}{(1+\beta)(1-\alpha\beta)}.$$

Déterminer la valeur optimale du paramètre β suivant la valeur de α. Pour quelles valeurs de α la méthode du lissage exponentiel simple est-elle inadaptée ?